(1日目)

周期駆動量子系の物理

板書へのリンク: 北村の個人HP
http://morimoto-lab.t.u-tokyo.ac.jp/kitamura/cmpss67

副読資料
- Eckardt RMP 89, 011004 (2017)
- Rudner, Lindner arXiv:2003.08252
- Oka, Kitamura Ann. Rev. CMP 10, 387 (2019)
- Aoki et al. RMP 86, 779 (2014)
- Mori arXiv:2203.16358
- 佐藤正寛 物性研究 10 (2022)

周期駆動量子系: ハミルトニアン $\hat{H}(t)$ が $\hat{H}(t) = \hat{H}(t+T)$ をみたす系.

T: 周期. $\Omega = \frac{2\pi}{T}$: 駆動周波数.

例1) AC電場(レーザー光)中の電子.

$$\hat{p} \to \hat{p} + eA(t), \quad E(t) = -\partial_t A(t).$$

$$A = \frac{E_0}{\Omega}\sin\Omega t \quad \text{など.}$$

例2) Shaken optical lattice (冷却原子系).

ポテンシャル $V(x) = V_0 \cos Kx$ を振動させる:

$$i\partial_t \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2M}\partial_x^2 \psi(x,t) + V(x - \delta\cos\Omega t)\psi(x,t).$$

cf. ポテンシャルの静止系: $\phi(x,t) = \psi(x + \delta\cos\Omega t, t)$.

$$i\partial_t \phi(x,t) = i\partial_t\psi + i\partial_x\psi \times (-\delta\Omega\sin\Omega t)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2M}\partial_x^2\phi(x,t) + V(x)\phi(x,t) \underbrace{- \delta\Omega\sin\Omega t\, i\partial_x\phi(x,t)}_{\text{ベクトルポテンシャル項}}.$$

$\hat{H}$ が時間依存 → 時間依存 Schrödinger eq.

$$i\partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)\,|\psi(t)\rangle \quad \text{—}\ (*)$$

を解く必要がある.

周期駆動系の利点: Floquet 理論が使える.

Floquet の定理　(*) の一般解は,

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = |u_\alpha(t)\rangle\, e^{-i\epsilon_\alpha t}, \quad |u_\alpha(t+T)\rangle = |u_\alpha(t)\rangle$$

の形の解の線形結合で表せる.

ϵ_α: 擬エネルギー　(Bloch の定理での結晶運動量)

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = \left(|u_\alpha(t)\rangle\, e^{i\Omega t}\right) e^{-i(\epsilon_\alpha+\Omega)t}$$
とも書けるので,

ϵ_α は mod Ω でのみ意味をもつ. (Floquet Brillouin ゾーン)

→ エネルギー方向にも周期性があるエネルギーバンドの出現.

ϵ_α を求める問題は「有効ハミルトニアン」の対角化問題に帰着できる.
(§1 で示す)

→ 有効ハミルトニアンの設計 = 物性の設計.

Floquet エンジニアリング.

特に バンドトポロジーの制御に有用. (§3 で見る)

Mott 転移, 磁性, 超伝導への応用 → §5.

§1 Floquetの定理.

$\hat{H}(t) = \hat{H}(t+T)$ 時間の離散並進対称性.

→ 対応する保存則?

($\hat{H}$が時間に依存しないとき)

時間発展演算子 $\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)}$

並進の固有状態 = $\hat{H}$の固有状態.

エネルギー($\hat{H}$の固有値)は時間並進で不変 (エネルギー保存則)

cf) その他の対称性: $[\hat{S}, \hat{H}] = 0$ なら,

$$e^{i\hat{H}t}\hat{S}e^{-i\hat{H}t} = \hat{S}$$ → $\langle \hat{S} \rangle$は時間変化しない.

($\hat{H}$が時間依存するとき)

$$\hat{U}(t, t_0) = \mathcal{T}\exp\left[-i\int_{t_0}^{t} dt' \, \hat{H}(t')\right]$$

$$:= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t} dt_N \, \mathcal{T}[\hat{H}(t_1)\cdots\hat{H}(t_N)]$$

並進の固有状態 ≠ $\hat{H}(t)$の固有状態.

→ 離散並進の固有状態(もしあるとしたら)どんな状態か?

$\hat{H}(t+T) = \hat{H}(t)$ から得られる性質.

$$\hat{U}(t+T, t_0+T) = \mathcal{T}\exp\left[-i\int_{t_0}^{t} dt' \, \underbrace{\hat{H}(t'+T)}_{= \hat{H}(t')}\right]$$

$$= \hat{U}(t, t_0).$$

離散並進: $t = t_0 + nT$ の場合.

$$\hat{U}(t_0+nT, t_0) = \overbrace{\hat{U}(t_0+nT, t_0+(n-1)T)}^{\hat{U}(t_0+T, t_0)} \times \hat{U}(t_0+(n-1)T, t_0+(n-2)T)$$

$$\times \cdots \times \underbrace{\hat{U}(t_0+2T, t_0+T)}_{\hat{U}(t_0+T, t_0)} \times \hat{U}(t_0+T, t_0)$$

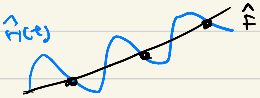
$$= [\hat{U}(t_0+T, t_0)]^n$$

$\to$ $\hat{U}(t_0+T, t_0) = e^{-i\hat{F}T}$ で $\hat{F}$ を定義すると、

$\hat{U}(t_0+nT, t_0) = e^{-i\hat{F}nT}$

時間に依存しないハミルトニアン $\hat{F}$ での nT の時間発展と等価!

離散並進の固有状態 $=$ $\hat{U}(t_0+nT, t_0)$ の固有状態



$=$ $\hat{U}(t_0+T, t_0)$ 〃

$=$ $\hat{F}$ の固有状態.

(Remark)

- $\hat{F}$ は基準時刻 t_0 には mod T で依存する.

$$e^{-i\hat{F}(t_0')T} = \hat{U}(t_0'+T, t_0')$$
$$= \hat{U}(t_0'+T, t_0+T)\hat{U}(t_0+T, t_0)\hat{U}(t_0, t_0')$$
$$= \hat{U}(t_0, t_0')^\dagger e^{-i\hat{F}(t_0)T}\hat{U}(t_0, t_0').$$

- $\hat{F}$ の固有値は t_0 には依存しない.
  (次のセクションで詳しく見る.)
- $\hat{F} = iT^{-1}\ln\hat{U}(t_0+T, t_0)$ の固有値は $iT^{-1}\times(-2\pi i) = \Omega$ の不定性をもつ $(e^{-i\Omega T} = 1)$

◇ 離散並進の固有状態の性質 (Floquetの定理)

時間依存 Schrödinger eq. の初期状態を
離散並進の固有状態に取ってみる.

$$\hat{F}(t_0)|\Phi_\alpha(t_0)\rangle = \epsilon_\alpha |\Phi_\alpha(t_0)\rangle$$

形式解は, $|\Phi_\alpha(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\Phi_\alpha(t_0)\rangle$.

このとき,

$$|\Phi_\alpha(t+nT)\rangle = \overbrace{\hat{U}(t+nT, t_0+nT)}^{\hat{U}(t,t_0)}\overbrace{\hat{U}(t_0+nT,t_0)}^{e^{-i\hat{F}nT}}|\Phi_\alpha(t_0)\rangle$$
$$= e^{-i\epsilon_\alpha nT}\hat{U}(t,t_0)|\Phi_\alpha(t_0)\rangle$$
$$= e^{-i\epsilon_\alpha nT}|\Phi_\alpha(t)\rangle.$$

↳任意のtにおいてTの並進に対する固有状態になっている.
(Floquet状態)

特にここで $|\Phi_\alpha(t)\rangle = |u_\alpha(t)\rangle e^{-i\epsilon_\alpha t}$ とおくと,

$$|u_\alpha(t+nT)\rangle \cancel{e^{-i\epsilon_\alpha(t+nT)}} = \cancel{e^{-i\epsilon_\alpha nT}}|u_\alpha(t)\rangle \cancel{e^{-i\epsilon_\alpha t}}$$

$\rightarrow |u_\alpha(t+nT)\rangle = |u_\alpha(t)\rangle$.　　$|u_\alpha(t)\rangle$は周期関数.
(Blochの定理の時間版)

(Remark)

- $\hat{F}$の固有状態は完全系をなすので, 任意の初期状態からの時間発展はFloquet状態の線形結合で表せる.
- Floquet状態は時間の離散並進の固有状態.
- 周期関数 $|u_\alpha(t)\rangle$ の選び方の不定性
  $\Rightarrow$ 擬エネルギーは mod Ω

◇ Sambe 空間

Floquet 状態 $|\Phi_\alpha(t)\rangle$

は $\hat{F}(t_0)|\Phi_\alpha(t_0)\rangle = \epsilon_\alpha|\Phi_\alpha(t_0)\rangle$ から求まる.

$$\hat{F}(t_0) = i T^{-1} \ln \hat{U}(t_0+T, t_0) .$$

$\hat{U}$ を計算せずに $|\Phi_\alpha(t)\rangle$ を求められないか?

→ Sambe 空間 の方法.

$|u_\alpha(t)\rangle = |u_\alpha(t+T)\rangle$ を Fourier 級数展開する.

$$\begin{cases} |u_\alpha(t)\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |u_{\alpha,m}\rangle e^{-im\Omega t} \\ |u_{\alpha,m}\rangle = \int_0^T \frac{dt}{T} |u_\alpha(t)\rangle e^{im\Omega t} \end{cases}$$

同様に, $\hat{H}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{H}_m e^{-im\Omega t}$.

$|\Phi_\alpha(t)\rangle = |u_\alpha(t)\rangle e^{-i\epsilon_\alpha t}$ は TD-Schrödinger eq. の解なので,

$$i\partial_t\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}|u_{\alpha,m}\rangle e^{\underbrace{-i(\epsilon_\alpha+m\Omega)t}}\right]$$

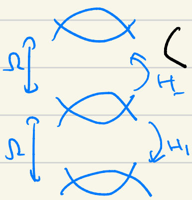
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{H}_{m-n}|u_{\alpha,n}\rangle e^{-i(\epsilon_\alpha+n\Omega)t} e^{\underbrace{-i(m-n)\Omega t}} .$$

$$\Leftrightarrow (\epsilon_\alpha+m\Omega)|u_{\alpha,m}\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{H}_{m-n}|u_{\alpha,n}\rangle .$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\hat{H}_{m-n} - \delta_{m-n}\, m\Omega\right)|u_{\alpha,n}\rangle = \epsilon_\alpha|u_{\alpha,m}\rangle .$$

→ Fourier index を新しい内部自由度とみなせば、

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ & \hat{H}_0 - \Omega & \hat{H}_1 & \hat{H}_2 & & \\ \ddots & \hat{H}_{-1} & \hat{H}_0 & \hat{H}_1 & \ddots \\ & \hat{H}_{-2} & \hat{H}_{-1} & \hat{H}_0 + \Omega & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ |v_{\alpha,1}\rangle \\ |v_{\alpha,0}\rangle \\ |v_{\alpha,-1}\rangle \\ \vdots \end{bmatrix} = \epsilon_\alpha \begin{bmatrix} \vdots \\ |v_{\alpha,1}\rangle \\ |v_{\alpha,0}\rangle \\ |v_{\alpha,-1}\rangle \\ \vdots \end{bmatrix}$$



$$(\hat{\mathcal{H}} - \hat{\mathcal{M}}\Omega)\,|v_\alpha\rangle\!\rangle = \epsilon_\alpha\,|v_\alpha\rangle\!\rangle$$

↑ 時間に依存しない Schrödinger eq.

（但し Hilbert 空間が大きくなっている）

↳ Sambe 空間と呼ぶことがある

(Remark)

- $\langle\!\langle v_\alpha | v_\beta \rangle\!\rangle = \int_0^T \frac{dt}{T} \langle v_\alpha(t) | v_\beta(t) \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ となっている。

  特に $|v_\beta(t)\rangle = |v_\alpha(t)\rangle e^{-i\Omega t}$ のときも $\langle\!\langle v_\alpha | v_\beta \rangle\!\rangle = 0$.

  → 物理的には等価な擬エネルギー $\epsilon_\alpha + n\Omega$ の解が Sambe 空間では区別される。

- エネルギー $\hbar\Omega$ の「フォトン」を吸ったり吐いたりする描像に対応している。（m はフォトン数と呼ばれることがある）

ここまでのまとめ： $\hat{H}(t) = \hat{H}(t+T)$ のとき、

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = |v_\alpha(t)\rangle e^{-i\epsilon_\alpha t}, \quad |v_\alpha(t+T)\rangle = |v_\alpha(t)\rangle.$$

↙ $t = t_0 + nT$ のみに着目　　　↘ Hilbert 空間を拡大

$$\underset{\substack{\| \\ \hat{U}(t_0+T,\, t_0)}}{e^{-i\hat{F}T}} |v_\alpha(t_0)\rangle = e^{-i\epsilon_\alpha T} |v_\alpha(t_0)\rangle \qquad (\hat{\mathcal{H}} - \hat{\mathcal{M}}\Omega)|v_\alpha\rangle\!\rangle = \epsilon_\alpha |v_\alpha\rangle\!\rangle$$

◇ 時間発展演算子のFloquet表示

Floquet状態を使って $\hat{U}(t,t_0)$ を書いてみる：

$$\hat{U}(t,t_0) = \sum_\alpha |\Psi_\alpha(t)\rangle\langle\Psi_\alpha(t_0)|$$
$$= \sum_\alpha |u_\alpha(t)\rangle\langle u_\alpha(t_0)|\, e^{-i\epsilon_\alpha(t-t_0)}.$$

適当な正規直交基底 $\{|\phi_\alpha\rangle\}$ を取ってくると，

$$\hat{U}(t,t_0) = \sum_\alpha |u_\alpha(t)\rangle\langle\phi_\alpha| \sum_\beta |\phi_\beta\rangle e^{-i\epsilon_\beta(t-t_0)}\langle\phi_\beta| \sum_\gamma |\phi_\gamma\rangle\langle u_\beta(t_0)|$$
$$:= \hat{V}(t)\, e^{-i\hat{H}_{\mathrm{eff}}(t-t_0)}\, \hat{V}(t_0)^\dagger$$

← 特に，$\hat{U}(t_0+T, t_0) = \hat{V}(t_0)\, e^{-i\hat{H}_{\mathrm{eff}}T}\, \hat{V}(t_0)^\dagger$

このとき $\hat{V}(t) = \hat{V}(t+T)$.

Remark: $|\phi_\alpha\rangle$ は $\hat{H}_{\mathrm{eff}}$ の固有ベクトル．なんでもよい．

$|\phi_\alpha\rangle = |u_\alpha(t_0)\rangle$ のとき $\hat{H}_{\mathrm{eff}} = \hat{F}(t_0)$, $\hat{V}(t_0) = 1$.

$$i\partial_t \hat{U}(t,t_0) = \hat{H}(t)\hat{U}(t,t_0) \quad \text{なので，}$$
$$(i\partial_t\hat{V}(t) + \hat{V}(t)\hat{H}_{\mathrm{eff}})\, e^{-i\hat{H}_{\mathrm{eff}}t} = \hat{H}(t)\hat{V}(t)\, e^{-i\hat{H}_{\mathrm{eff}}t}$$
$$\Leftrightarrow \quad \hat{V}(t)^\dagger(\hat{H}(t) - i\partial_t)\hat{V}(t) = \hat{H}_{\mathrm{eff}}$$

つまり，周期駆動系では $\hat{H}(t)$ を時間に依存しない演算子 $\hat{H}_{\mathrm{eff}}$ にする周期的なユニタリ変換 $\hat{V}(t) = \hat{V}(t+T)$ が必ず存在する．

逆に上のようなユニタリ変換が存在するとき，

$\hat{H}_{\mathrm{eff}}|\phi_\alpha\rangle = \epsilon_\alpha|\phi_\alpha\rangle$ だとすると

$$i\partial_t(\underbrace{\hat{V}(t)|\phi_\alpha\rangle}_{\text{周期関数}} e^{-i\epsilon_\alpha t}) = (\hat{H}(t)\hat{V}(t) - \cancel{\hat{V}(t)\hat{H}_{\mathrm{eff}}})|\phi_\alpha\rangle e^{-i\epsilon_\alpha t}$$
$$+ \cancel{\epsilon_\alpha\hat{V}(t)|\phi_\alpha\rangle e^{-i\epsilon_\alpha t}}$$
$$= \hat{H}(t)(\hat{V}(t)|\phi_\alpha\rangle e^{-i\epsilon_\alpha t})$$

Floquetの定理と同値．

§2 高周波展開

Floquet エンジニアリングでやりたいこと

外場なし $\quad\quad\quad\quad$ 外場あり

$$e^{-i\hat{H}t} \rightarrow e^{-i\hat{F}T} = \hat{U}(t_0+T,\, t_0)$$

ハミルトニアンが外場印加の前後でどう変化するかを調べることで，系統的に物性をコントロールしたい．

問題点

- $\hat{F}$ の具体形がわからない．
- $\hat{F}$ の t_0 依存性の扱い方？
  (例えば，期待値の t_0 平均などが本当は知りたい)

→ 摂動論を使ってべき級数解をつくる．
 → $\hat{F}$ に対する摂動論とは？

$\hat{F}$ の (形式的な) 決め方

① $\hat{F} = iT^{-1} \ln \hat{U}(t_0+T,\, t_0)$ の右辺を $\hat{U}$ に対する TD Schrödinger eq. を解いて求める．

② $\hat{V}(t)^\dagger(\hat{H}(t) - i\partial_t)\hat{V}(t) = \hat{H}_{eff}$ を $\hat{V}(t_0) = 1$ のもとで解くと $\hat{H}_{eff} = \hat{F}$ となる．

② は Sambe 空間で表示すると，

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & \\ \ddots & V_0 & V_1 & \\ & V_{-1} & V_0 & V_1 \\ & & V_{-1} & V_0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}^\dagger (\hat{\mathcal{H}} - \hat{M}\Omega) \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & \\ \ddots & V_0 & V_1 & \\ & V_{-1} & V_0 & V_1 \\ & & V_{-1} & V_0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & H_{eff}-\Omega & & O \\ & & H_{eff} & \\ & O & & H_{eff}+\Omega \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

→ $\hat{V}$ はブロック対角化を行う行列．

Sambe 空間では ふつうの 摂動展開が使える.
特に、縮退のある摂動論は 数学的には
ブロック対角化の逐次解法に相当.

→ 自明にブロック対角になる（＝時間に依存しない）
極限からの展開を Sambe 空間で行えばよい.

$\Omega \to \infty$ の極限

$$\hat{\mathcal{H}} - \hat{M}\Omega \sim -\hat{M}\Omega = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \boxed{-\Omega} & & & \\ & & \boxed{0} & & \\ & & & \boxed{\Omega} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

から展開する. （$1/\Omega$ での展開）

$\hat{V}(t) = e^{-i\hat{\Lambda}(t)}$, $\hat{\Lambda}(t) = \sum_m \hat{\Lambda}_m e^{-im\Omega t}$ とおくと

$$\hat{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & & \\ & \Lambda_0 & \Lambda_1 & \Lambda_2 & \\ \cdots & \Lambda_{-1} & \Lambda_0 & \Lambda_1 & \cdots \\ & \Lambda_{-2} & \Lambda_{-1} & \Lambda_0 & \\ & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

を用いて,

$$e^{i\hat{\mathcal{L}}}(\hat{\mathcal{H}} - \hat{M}\Omega)e^{-i\hat{\mathcal{L}}} = (\hat{H}_{eff} \otimes 1) - \hat{M}\Omega.$$

これを
$$\begin{cases} \hat{H}_{eff} = \hat{H}_{eff}^{(0)} + \hat{H}_{eff}^{(1)} + \cdots \\ \hat{\Lambda}_m = \hat{\Lambda}_m^{(1)} + \hat{\Lambda}_m^{(2)} + \cdots \end{cases}$$

として係数比較すればよい.
（$\Omega \to \infty$ では既にブロック対角なので $\hat{\Lambda}_m^{(0)} = 0$ とした）

(補足) $e^{i\hat{\Lambda}(t)}(\hat{H}(t) - i\partial_t)\, e^{-i\hat{\Lambda}(t)} = \hat{H}_{\mathrm{eff}}$

$\to\ e^{i\hat{\mathcal{L}}}(\hat{\mathcal{H}} - \hat{\mathcal{M}}\Omega)\, e^{-i\hat{\mathcal{L}}} = \hat{H}_{\mathrm{eff}} \otimes \mathbb{1} - \hat{\mathcal{M}}\Omega$ の導出

$[\hat{A}]_{m,n} = \hat{A}_{m-n}$ の形の行列について、

$$[\hat{A}\,\hat{B}]_{m,n} = \sum_l [\hat{A}]_{m,l}[\hat{B}]_{l,n} = \sum_l \underset{m-n-l}{\hat{A}_{m-l}}\ \underset{l}{\hat{B}_{l-n}}$$

$$= \int_0^T \frac{dt}{T}\, \hat{A}(t)\,\hat{B}(t)\, e^{i(m-n)\Omega t}$$

$$\therefore \int_0^T \frac{dt}{T}\, e^{i\hat{\Lambda}(t)}\, \hat{H}(t)\, e^{-i\hat{\Lambda}(t)}\, e^{i(m-n)\Omega t} = [e^{i\hat{\mathcal{L}}}\,\hat{\mathcal{H}}\,e^{-i\hat{\mathcal{L}}}]_{m,n}.$$

他方、

$$\int_0^T \frac{dt}{T}\left[e^{i\hat{\Lambda}(t)}\, i\partial_t\, e^{-i\hat{\Lambda}(t)}\right] e^{i(m-n)\Omega t}$$

$$= \int_0^T \frac{dt}{T}\left[e^{i\hat{\Lambda}(t)}\, i\partial_t\Big(\sum_l [e^{-i\hat{\mathcal{L}}}]_{l,n}\, e^{-i(l-n)\Omega t}\Big)\right] e^{i(m-n)\Omega t}$$

$$= \sum_l [e^{i\hat{\mathcal{L}}}]_{m,l}\,(l-n)\Omega\,[e^{-i\hat{\mathcal{L}}}]_{l,n}$$

$$= \left[e^{i\hat{\mathcal{L}}}\,[\hat{\mathcal{M}}\Omega,\ e^{-i\hat{\mathcal{L}}}]\right]_{m,n}$$

$$= [e^{i\hat{\mathcal{L}}}\,\hat{\mathcal{M}}\Omega\, e^{-i\hat{\mathcal{L}}} - \hat{\mathcal{M}}\Omega]_{m,n}.$$

(Bernoulli数を使ったエレガントな計算方法は講義ノート参照)

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \cdots$$

を使うと、

$$\hat{\mathcal{H}} - \cancel{\hat{M}\Omega} + [i\hat{\mathcal{L}}, \hat{\mathcal{H}} - \hat{M}\Omega] + \frac{1}{2!}[i\hat{\mathcal{L}},[i\hat{\mathcal{L}},\hat{\mathcal{H}} - \hat{M}\Omega]] + \cdots = (\hat{H}_{\text{eff}} \otimes 1) - \cancel{\hat{M}\Omega}$$

$1/\Omega$ の 0次: $\hat{\mathcal{H}} + [i\hat{\mathcal{L}}^{(1)}, -\hat{M}\Omega] = \hat{H}_{\text{eff}}^{(0)} \otimes 1$.

$$\hat{H}_m + i m\Omega\,\hat{\Lambda}_m^{(1)} = \hat{H}_{\text{eff}}^{(0)}\,\delta_{m,0}$$

$$\rightarrow \quad \hat{H}_{\text{eff}}^{(0)} = \hat{H}_0, \quad \hat{\Lambda}_{m\neq 0}^{(1)} = -\frac{\hat{H}_m}{i m\Omega}.$$

$\hat{\Lambda}_0^{(1)}$ は積分定数として残る (後で扱う)

$1/\Omega$ の 1次: $[i\hat{\mathcal{L}}^{(1)}, \hat{\mathcal{H}}] + [i\hat{\mathcal{L}}^{(2)}, -\hat{M}\Omega] + \frac{1}{2!}[i\hat{\mathcal{L}}^{(1)}, \underbrace{[i\hat{\mathcal{L}}^{(1)}, -\hat{M}\Omega]}_{\hat{H}_{\text{eff}}^{(0)}\otimes 1 - \hat{\mathcal{H}}}] = \hat{H}_{\text{eff}}^{(1)} \otimes 1$.

$$[i\hat{\mathcal{L}}^{(2)}, -\hat{M}\Omega] + \frac{1}{2}[i\hat{\mathcal{L}}^{(1)}, \hat{H}_{\text{eff}}^{(0)}\otimes 1 + \hat{\mathcal{H}}] = \hat{H}_{\text{eff}}^{(1)} \otimes 1.$$

$$\xrightarrow{\text{対角成分}} \sum_m \frac{1}{2}[i\underbrace{\hat{\Lambda}_{-m}^{(1)}}_{=\hat{H}_{-m}/m\Omega}, \underbrace{\hat{H}_{\text{eff}}^{(0)}}_{=\hat{H}_0}\delta_{m,0} + \hat{H}_m] = \hat{H}_{\text{eff}}^{(1)}.$$

$$\hat{H}_{\text{eff}}^{(1)} = \sum_{m\neq 0}\frac{[\hat{H}_{-m}, \hat{H}_m]}{2m\Omega} + [i\hat{\Lambda}_0^{(1)}, \hat{H}_0].$$

まとめると、
$$\hat{H}_{eff} = \hat{H}_0 + \sum_{m\neq 0} \frac{[\hat{H}_{-m}, \hat{H}_m]}{2m\Omega} + [i\hat{\Lambda}_0^{(1)}, \hat{H}_0] + \cdots ,$$

$\hat{\Lambda}_0$ の決め方？

→ $\hat{H}_{eff}$ の固有ベクトルは何でもよかったことと対応。

$\hat{V}(t_0) = 1 \Leftrightarrow \hat{\Lambda}(t_0) = 0$ が $\hat{H}_{eff} = \hat{F}(t_0)$ と対応。

$$\hat{\Lambda}_0^{(N)} + \sum_{m\neq 0} \hat{\Lambda}_m^{(N)} e^{-imΩt_0} = 0 .$$

これを特に Floquet - Magnus 展開 と呼ぶ。

一方、他の $\hat{\Lambda}_0$ の選び方でも固有値は

(打ち切り誤差の範囲内では) 同じ。

$\hat{\Lambda}_0^{(N)} = 0$ とするのが一番シンプルな展開。

(van Vleck 展開)

・ van Vleck 展開のメリット

$\hat{H}_{eff} |\Phi_\alpha\rangle = \epsilon_\alpha |\Phi_\alpha\rangle$ のとき

Floquet 状態 は $|\Psi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\hat{\Lambda}(t)} |\Phi_\alpha\rangle e^{-i\epsilon_\alpha t}$.

Floquet 状態での期待値

$$\langle \Psi_\alpha(t) | \hat{O} | \Psi_\alpha(t) \rangle = \langle \Phi_\alpha | e^{i\hat{\Lambda}(t)} \hat{O} e^{-i\hat{\Lambda}(t)} | \Phi_\alpha \rangle .$$

$$\underline{e^{i\hat{\Lambda}(t)} \hat{O} e^{-i\hat{\Lambda}(t)}} = \hat{O} + \overline{[i\hat{\Lambda}(t), \hat{O}]} + \frac{1}{2!} \overline{[i\hat{\Lambda}(t), [i\hat{\Lambda}(t), \hat{O}]]} + \cdots$$

$$\overline{[i\hat{\Lambda}(t), \hat{O}]} = [i\hat{\Lambda}_0, \hat{O}] \qquad \frac{1}{2!} \overline{[i\hat{\Lambda}(t), [i\hat{\Lambda}(t), \hat{O}]]} = O(1/\Omega^2)$$

van Vleck 展開では常にゼロ。

§ 3 Floquet Engineering I

「物質 + レーザー電場」 への Floquet 理論の応用.

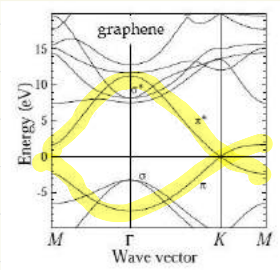
セットアップのモデル化
（第一原理計算に Floquet 理論を組み合わせるのは現状難しい）

→ タイトバインディング模型.

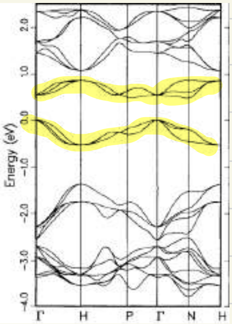
$$\hat{H} = \sum_{ij\sigma} \sum_{mm'} t_{ij}^{mm'} \hat{c}_{im\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{jm'\sigma}$$

i: 格子点を指定するラベル　($\mathbb{r} = \mathbb{R}_i$)
m: 格子点上の原子軌道のラベル.　(Wannier 関数)
σ: スピン.
$t_{ij}^{mm'}$: ホッピング振幅 (パラメータ).

ホッピングは第一原理計算で得られるバンド構造を再現するように選ぶ (wannier90 で計算できる)



グラフェン



K_6C_{60}

- フォノン自由度は無視されている.
- モデルから除外した軌道への（電場による）遷移も無視することになる.

レーザー電場

$$\begin{cases} \mathbb{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}_0 e^{-i\Omega t} + \mathbb{E}_0^* e^{i\Omega t}\right) \\ \mathbb{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{i\mathbb{E}_0}{\Omega} e^{-i\Omega t} - \frac{i\mathbb{E}_0^*}{\Omega} e^{i\Omega t}\right), \quad \phi = 0. \end{cases}$$

- 本来は $e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}$ が入るが無視する.（$\lambda \gtrsim 100\,\mathrm{nm}$）
- 併せて $\mathbb{B} = \frac{i}{2\Omega}\mathbb{k}\times\mathbb{E}_0 e^{-i\Omega t} + \mathrm{c.c.}$ も無視.

モデルへの電場の導入

$\hat{\mathbb{p}} \to \hat{\mathbb{p}} + e\mathbb{A}$ に相当する操作.　（以後 $e=1$）

Peierls substitution

$$t_{ij}^{mm'} \longrightarrow t_{ij}^{mm'} e^{-i\mathbb{A}\cdot(\mathbb{R}_i - \mathbb{R}_j)}$$

（$\mathbb{A}$ の空間依存性が無視できるとき有効）

$$\because \quad \hat{C}_i^\dagger \hat{C}_j = \hat{C}_i^\dagger e^{-(\mathbb{R}_i - \mathbb{R}_j)\cdot\nabla} \hat{C}_i = \hat{C}_i^\dagger e^{-i\hat{\mathbb{p}}\cdot(\mathbb{R}_i - \mathbb{R}_j)} \hat{C}_i$$

- $\mathbb{A}$ を使う記述を velocity ゲージという.
  ϕ を使う記述 length ゲージでは

$$\hat{H} \to \hat{H} + \sum_{im\sigma} \mathbb{E}\cdot\mathbb{R}_i \hat{C}_{im\sigma}^\dagger \hat{C}_{im\sigma}.$$

- 原子内の電気双極子遷移（同一サイト内での軌道間遷移）等は無視されている.

$$-\mathbb{E}\cdot\mathbb{D}_{mm'} \hat{C}_{im\sigma}^\dagger C_{im'\sigma}, \qquad \mathbb{D}_{mm'} = \int d^3r\, w_m^* \mathbb{r}\, w_{m'}$$

◇ 動的局在現象

1次元，1軌道。スピンは無視。 $R_i = i$

$$\hat{H}(t) = -\tau \sum_{j=1}^{L} \left(e^{iA(t)} \hat{c}_j^{\dagger} \hat{c}_{j+1} + e^{-iA(t)} \hat{c}_{j+1}^{\dagger} \hat{c}_j \right)$$

周期境界 $\hat{c}_{L+1} = \hat{c}_1$

離散Fourier変換 $k = \frac{2\pi k_n}{L}$, $k_n \in \mathbb{Z}$

$$\hat{c}_k := \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{j=1}^{L} e^{-2\pi i k_n j/L} \hat{c}_j .$$

$$\rightarrow \hat{c}_j = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k_n=1}^{L} e^{2\pi i k_n j/L} \hat{c}_k .$$

$$\hat{H}(t) = -\tau \sum_{j=1}^{L} e^{iA(t)} \hat{c}_j^{\dagger} \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k_n=1}^{L} e^{2\pi i k_n (j+1)/L} \hat{c}_k + H.c.$$

$\hat{c}_k^{\dagger} e^{2\pi i k_n/L}$

$$= -\tau \sum_{k_n=1}^{L} e^{i(k+A(t))} \hat{c}_k^{\dagger} \hat{c}_k + H.c.$$

Jacobi-Anger 恒等式 Bessel 関数

$$\exp\left(\frac{w}{2}(z - z^{-1})\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(w) z^m$$

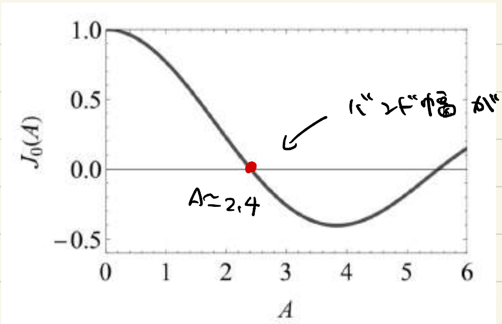
$z = i e^{i\Omega t}$ とおくと 左辺 $= e^{iw\cos\Omega t}$

$$\rightarrow e^{i(k+A_0\cos\Omega t)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(A_0)\, i^m\, e^{im\Omega t}$$

特に。 $\hat{H}_0 = -\tau \sum_k J_0(A_0) e^{ik} \hat{c}_k^{\dagger} \hat{c}_k + H.c.$

$$= -2\tau \sum_k J_0(A_0) \cos k\, \hat{c}_k^{\dagger} \hat{c}_k .$$

→ バンド幅が $J_0(A_0)$ 倍される。



バンド幅がゼロになる(電子の分散が消失).

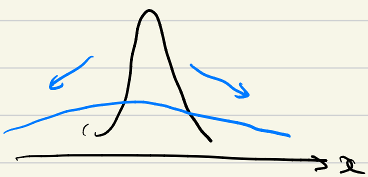
Comments

今の場合は $[\hat{H}_m, \hat{H}_{m'}] = 0$ が常に成立.

$\hat{H}_{eff} = \hat{H}_0$ が厳密に成り立つ.

一般の格子モデルでも高周波極限で普遍的な振る舞い.

- $A_0 = \dfrac{eE_0 a}{\hbar\Omega}$ なので Ω も E_0 も非常に大きい.



波束の拡散が外場の印加で無限に遅くなる(局在)

1日目のおさらい

$\hat{H}(t) = \hat{H}(t+T)$ のとき、

- $\hat{U}(t_0+nT, t_0) = [\hat{U}(t_0+T, t_0)]^n = e^{-i\hat{F}nT}$

- Floquetの定理 $\begin{cases} |\psi_\alpha(t)\rangle = |u_\alpha(t)\rangle e^{-i\epsilon_\alpha t} \\ |u_\alpha(t+T)\rangle = |u_\alpha(t)\rangle \end{cases}$ $t=t_0+nT$

  Fourier

- Sambe空間

$$(\hat{\mathcal{H}} - \hat{\mathcal{M}}\Omega)|u_\alpha\rangle\rangle = \epsilon_\alpha |u_\alpha\rangle\rangle$$

- 高周波展開

  $\Omega\to\infty$ からの逐次的ブロック対角化

$$\to \hat{H}_{\mathrm{eff}} = \hat{H}_0 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{[\hat{H}_{-m}, \hat{H}_m]}{2m\Omega}$$

タイトバインディングモデルのAC駆動

$$\hat{H}(t) = \sum_{ij} t_{ij} e^{-i\mathbb{A}\cdot(\mathbb{R}_i - \mathbb{R}_j)} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j$$

- 動的局在現象

$$\overline{e^{iA_0\cos\Omega t}} = J_0(A_0)$$

$A_0 = \dfrac{eE_0 a}{\hbar\Omega} \simeq 2.4$ のとき、バンドが平坦になる。

(補足1) 副読資料 へのリンクを HP に追加.

Eckardt RMP 89, 011004 (2017) Mori arXiv: 2203.16358

Rudner, Lindner arXiv:2003.08252 佐藤 正寛 物性研究 10 (2022)

Oka, Kitamura Ann. Rev. CMP 10, 387 (2019)

Aoki et al. RMP 86, 779 (2014)

(補足2) $e^{i\hat{\Lambda}(t)} (\hat{H}(t) - i\partial_t) e^{-i\hat{\Lambda}(t)} = \hat{H}_{\rm eff}$

$\to e^{i\hat{\mathcal{L}}} (\hat{\mathcal{H}} - \hat{\mathcal{M}}\Omega) e^{-i\hat{\mathcal{L}}} = \hat{H}_{\rm eff} \otimes 1 - \hat{\mathcal{M}}\Omega$ の導出

$[\hat{A}]_{m,n} = \hat{A}_{m-n}$ の形の行列について,

$$\underbrace{[\hat{A}\hat{B}]_{m,n}} = \sum_\ell [\hat{A}]_{m,\ell} [\hat{B}]_{\ell,n} = \sum_\ell \underset{m-n-\ell}{\hat{A}_{m-\ell}} \ \underset{\ell}{\hat{B}_{\ell-n}}$$

$$= \int_0^T \frac{dt}{T} \underbrace{\hat{A}(t)\hat{B}(t)} e^{i(m-n)\Omega t}$$

$$\therefore \int_0^T \frac{dt}{T} e^{i\hat{\Lambda}(t)} \hat{H}(t) e^{-i\hat{\Lambda}(t)} e^{i(m-n)\Omega t} = [e^{i\hat{\mathcal{L}}} \hat{\mathcal{H}} e^{-i\hat{\mathcal{L}}}]_{m,n}.$$

他方,

$$\int_0^T \frac{dt}{T} \left[e^{i\hat{\Lambda}(t)} i\partial_t e^{-i\hat{\Lambda}(t)} \right] e^{i(m-n)\Omega t}$$

$$= \int_0^T \frac{dt}{T} \left[e^{i\hat{\Lambda}(t)} i\partial_t \left(\sum_\ell [e^{-i\hat{\mathcal{L}}}]_{\ell,n} e^{-i(\ell-n)\Omega t} \right) \right] e^{i(m-n)\Omega t}$$

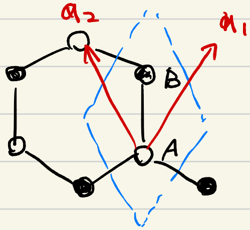
$$= \sum_\ell [e^{i\hat{\mathcal{L}}}]_{m,\ell} (\ell-n)\Omega [e^{-i\hat{\mathcal{L}}}]_{\ell,n}$$

$$= [e^{i\hat{\mathcal{L}}} [\hat{\mathcal{M}}\Omega, e^{-i\hat{\mathcal{L}}}]]_{m,n}$$

$$= [e^{i\hat{\mathcal{L}}} \hat{\mathcal{M}}\Omega e^{-i\hat{\mathcal{L}}} - \hat{\mathcal{M}}\Omega]_{m,n}.$$

◇ Floquet トポロジカル絶縁体

ハニカム格子上の1軌道模型 (グラフェン)



Aサイトの位置 : $\mathbb{R}_i = n_i a_1 + m_i a_2$

Bサイトの位置 : $\mathbb{R}_i = n_i a_1 + m_i a_2 + (0,1)$

$$\hat{H} = \tau \sum_{ij} \left[e^{-iA\cdot(\mathbb{R}_i - \mathbb{R}_j)} \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_j + \text{H.c.} \right]$$
$$\times \left(\delta_{n_i, n_j} \delta_{m_i, m_j} + \delta_{n_i, n_j - 1} \delta_{m_i, m_j} + \delta_{n_i, n_j} \delta_{m_i, m_j - 1} \right)$$
$$+ m \sum_i \left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i \right).$$

$\hat{a}_i, \hat{b}_i$ をそれぞれ離散 Fourier 変換 $c = a, b$ として

$$\hat{c}_k = \frac{1}{L} \sum_{n_i=1}^{L} \sum_{m_i=1}^{L} e^{-2\pi i (n_i p_k + m_i q_k)/L} \hat{c}_i$$

$$\left(a_i \cdot \mathbb{b}_j = 2\pi \delta_{ij} \text{ として}, \ \mathbb{k} = \frac{p_k}{L} \mathbb{b}_1 + \frac{q_k}{L} \mathbb{b}_2 \right)$$

$$\rightarrow \hat{c}_i = \frac{1}{L} \sum_{p_k=1}^{L} \sum_{q_k=1}^{L} e^{2\pi i (n_i p_k + m_i q_k)/L} \hat{c}_{\mathbb{k}}.$$

↑ 一般には $i\mathbb{k}\cdot\mathbb{R}_i$ とは限らない

例えば $\displaystyle\sum_{ij} e^{-iA\cdot(\mathbb{R}_i - \mathbb{R}_j)} \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_j \delta_{n_i, n_j - 1} \delta_{m_i, m_j}$

$$= \sum_{\cancel{i}j} e^{iA\cdot(a_1 + (0,1))} \left(\frac{1}{L} \sum_{\mathbb{k}} e^{-2\pi i (\cancel{n_i}^{\,n_j - 1} p_k + \cancel{m_i}^{\,m_j} q_k)/L} \hat{a}_{\mathbb{k}}^\dagger \right) \hat{b}_j$$

$$= \sum_{\mathbb{k}} e^{iA\cdot(a_1 + (0,1))} e^{i\mathbb{k}\cdot a_1} \hat{a}_{\mathbb{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbb{k}}.$$

$$\rightarrow \hat{H} = \sum_{\mathbb{k}} \tau \hat{a}_{\mathbb{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbb{k}} e^{iA\cdot(0,1)} \left(1 + e^{i(\mathbb{k}+A)\cdot a_1} + e^{i(\mathbb{k}+A)\cdot a_2} \right)$$
$$+ \text{H.c.} + m \sum_{\mathbb{k}} \left(\hat{a}_{\mathbb{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbb{k}} - \hat{b}_{\mathbb{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbb{k}} \right).$$

行列形式にまとめると、

$$\hat{H} = \sum_{\mathbb{k}} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\mathbb{k}} \\ \hat{b}_{\mathbb{k}} \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} m & \tau f(\mathbb{k}+\mathbb{A}) e^{-i\mathbb{k}\cdot(0,1)} \\ c.c. & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\mathbb{k}} \\ \hat{b}_{\mathbb{k}} \end{pmatrix}.$$

$$f(\mathbb{k}) = e^{i\mathbb{k}\cdot(0,1)} + e^{i\mathbb{k}\cdot(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})} + e^{i\mathbb{k}\cdot(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})}$$

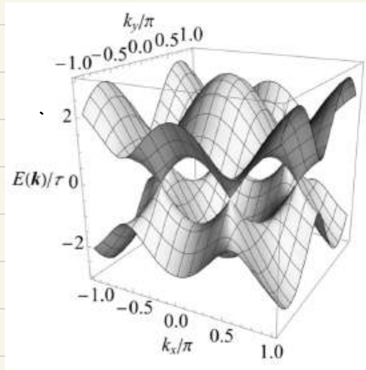
まずは平衡 $(\mathbb{A}(t)=0)$ の場合について。

単位行列　パウリ行列

2×2行列 H は一般に $H = d_0\sigma_0 + \mathbb{d}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ の形に表せる

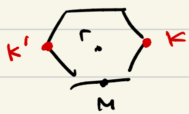
固有値は $E_\pm = d_0 \pm |\mathbb{d}|$

今の場合は $E_\pm(\mathbb{k}) = \sqrt{m^2+\tau^2|f(\mathbb{k})|^2}$



BZの端 $\mathbb{k} = \pm\mathbb{K} = \pm\frac{1}{3}(\mathbb{b}_1-\mathbb{b}_2)$ で

ギャップ $E_+ - E_-$ は最小値をとる.



$$f(\pm\mathbb{K}+\mathbb{k}) \simeq \frac{3}{2}(\mp k_x + i k_y) + O(k^2)$$ なので、

$$E_+(\pm\mathbb{K}+\mathbb{k}) \simeq \sqrt{m^2+\frac{9\tau^2}{4}k^2}$$ ← $\pm\mathbb{K}$で同じ形。

$H = d_0 + \mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ の固有ベクトル

→ $\mathbf{d}$ に平行／反平行な擬スピン.

トポロジー

$\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ がBZ内を動き回るとき,

擬スピンの向きがつくる立体角を考える.

→ BZの端で周期性をみたすので,

立体角は必ず 4π の整数倍になる.

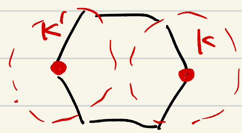
これは $\mathbf{d}(\mathbf{k})/|\mathbf{d}(\mathbf{k})|$ が $\mathbf{k}$ について

なめらかな関数である限りは値が変わらない.

(トポロジカル不変量)　ギャップが閉じるとき値が変わる.

$$H = \begin{pmatrix} m & \frac{3}{2}t(\mp k_x + i k_y) \\ c.c. & -m \end{pmatrix}$$ の場合,

$$\mathbf{d} = \left(\mp\frac{3}{2}t k_x, -\frac{3}{2}t k_y, m\right).$$



$$\text{立体角}\ \Lambda = \int d^2k \frac{\mathbf{d}\cdot(\partial_{k_x}\mathbf{d}\times\partial_{k_y}\mathbf{d})}{|\mathbf{d}|^3}$$

$$= \int d^2k \frac{\pm\frac{9}{4}t^2 m}{(m^2+\frac{9}{4}t^2k^2)^{3/2}}$$

$$= \int_0^\infty dk\ 2\pi k \frac{\pm\frac{9}{4}t^2 m}{(m^2+\frac{9}{4}t^2k^2)^{3/2}}$$

$$= \left[-2\pi\frac{\pm m}{(m^2+\frac{9}{4}t^2k^2)^{1/2}}\right]_0^\infty = \mp 2\pi\ \mathrm{sgn}\ m$$

↦ $\mathbf{k} = \pm\mathbf{K}$ からの寄与はキャンセルして立体角0になる.

(トポロジカルに自明)

• Floquet Engineering によるトポロジーの制御

外場として円偏光を入れたとき $\left(\mathbb{A} = A_0(\cos\Omega t, \sin\Omega t)\right)$ の振る舞いを

- $\pm\mathbb{K}$ 直上
- $\pm\mathbb{K}$ 近傍の線形分散領域
- 格子系

の順に見てみる。

$$f(\pm\mathbb{K} + \mathbb{k} + \mathbb{A}) \simeq \frac{3}{2}\left[\mp(k_x + A_x) + i(k_y + A_y)\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left(\mp k_x + i k_y \mp A_0 e^{\mp i\Omega t}\right)$$

特に $\mathbb{k} = 0$ のとき、

$$\hat{H}(\mathbb{K}, t) = \begin{pmatrix} m & -\frac{3}{2}\tau A_0 e^{-i\Omega t} \\ -\frac{3}{2}\tau A_0 e^{i\Omega t} & -m \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}(-\mathbb{K}, t) = \begin{pmatrix} m & \frac{3}{2}\tau A_0 e^{i\Omega t} \\ \frac{3}{2}\tau A_0 e^{-i\Omega t} & -m \end{pmatrix}.$$

Sambe 空間表示

$$\hat{H}(-\mathbb{K}) - \hat{m}\Omega = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} m-\Omega & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -m-\Omega & \frac{3}{2}\tau A_0 & 0 & & \\ \hline 0 & \frac{3}{2}\tau A_0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & \frac{3}{2}\tau A_0 & 0 \\ \hline & & 0 & \frac{3}{2}\tau A_0 & m+\Omega & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & -m+\Omega \end{array}\right]$$

$$\hat{H}(+\mathbb{K}) - \hat{m}\Omega = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} m-\Omega & & 0 & -\frac{3}{2}\tau A_0 & & \\ & -m-\Omega & 0 & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & m & & 0 & -\frac{3}{2}\tau A_0 \\ -\frac{3}{2}\tau A_0 & 0 & & -m & 0 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 & m+\Omega & \\ & & -\frac{3}{2}\tau A_0 & 0 & & -m+\Omega \end{array}\right]$$

$$\hat{\mathcal{H}}(+K) - \hat{M}\Omega = \bigoplus_n \begin{pmatrix} m + (n-1)\Omega & -\frac{3}{2}\tau A_0 \\ -\frac{3}{2}\tau A_0 & -m + n\Omega \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{H}}(-K) - \hat{M}\Omega = \bigoplus_n \begin{pmatrix} -m + (n-1)\Omega & \frac{3}{2}\tau A_0 \\ \frac{3}{2}\tau A_0 & m + n\Omega \end{pmatrix}.$$

$$E_{\pm}(+K) = \mp\frac{\Omega}{2} \pm \sqrt{\left(m - \frac{\Omega}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\tau^2 A_0^2} + n\Omega$$

$$E_{\pm}(-K) = \mp\frac{\Omega}{2} \pm \sqrt{\left(m + \frac{\Omega}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\tau^2 A_0^2} + n\Omega$$

Ωの不定性, $m = A_0 = 0$ のときギャップレスになる

ギャップが閉じる条件

$$\left(m \mp \frac{\Omega}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\tau^2 A_0^2 = \frac{\Omega^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_0 = \frac{2}{3\tau}\sqrt{m(-m \pm \Omega)}$$

→ 実は ここで トポロジカル転移が起きている.

- $\mathbb{k} \neq 0$ (但し小さい) のとき

→ $f(\pm\mathbb{K}+\mathbb{k}+\mathbb{A}) \simeq \frac{3}{2}(\mp k_x + i k_y \mp A_0 e^{\mp i\Omega t})$ を使って

高周波展開を計算

$$\hat{H}_0(\pm\mathbb{K}+\mathbb{k}) = \begin{pmatrix} m & \frac{3\tau}{2}(\mp k_x + i k_y) \\ c.c. & -m \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}_{\pm 1}(\pm\mathbb{K}+\mathbb{k}) = \begin{pmatrix} 0 & \mp\frac{3\tau}{2}A_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{H}_{\mp 1}(\pm\mathbb{K}+\mathbb{k}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mp\frac{3\tau}{2}A_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H}_0 + \frac{[\hat{H}_{+1}, \hat{H}_{-1}]}{-2\Omega} + \frac{[\hat{H}_{-1}, \hat{H}_{+1}]}{2\Omega}$$

$$= \hat{H}_0 \pm \frac{[\hat{H}_{\mp 1}, \hat{H}_{\pm 1}]}{\Omega}.$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ より

$$\hat{H}_{eff} = \begin{pmatrix} m & \frac{3\tau}{2}(\mp k_x + i k_y) \\ c.c. & -m \end{pmatrix} \mp \frac{9\tau^2 A_0^2}{4\Omega}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A=0$ のときの $\hat{d} = d/|d|$ の立体角は $\Lambda = \sum_{\pm} \mp 2\pi \,\mathrm{sgn}\, m = 0$.

→ $1/\Omega$ の補正項があると, $\Lambda = \sum_{\pm} \mp 2\pi \,\mathrm{sgn}\left(m \mp \frac{9\tau^2 A_0^2}{4\Omega}\right)$

m が十分小さければ, $\Lambda = 4\pi \,\mathrm{sgn}\,\Omega \neq 0$

→ 円偏光によってバンドのトポロジーが変わる!

格子模型としての補正項の意味

$$\hat{H}(t) = \sum_{ij} t_{ij}\, \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_j\, e^{-i\mathbb{A}\cdot(\mathbb{R}_i - \mathbb{R}_j)} + H.c.$$

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2}\mathbb{A}_0 e^{-i\Omega t} + \frac{1}{2}\mathbb{A}_0^* e^{i\Omega t}$$

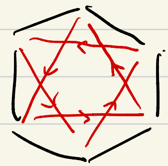
$$\hat{H}_0 \simeq \sum_{ij} t_{ij}\, \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_j + H.c.$$

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_{-1}^\dagger \simeq \sum_{ij} (-i t_{ij}\, \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_j + H.c.) \times \frac{1}{2}\mathbb{A}_0 \cdot (\mathbb{R}_i - \mathbb{R}_j)$$

$$[\hat{a}_i^\dagger \hat{b}_j,\ \hat{b}_p^\dagger \hat{a}_q] = \delta_{jp}\, \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_q - \delta_{iq}\, \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_j .$$

$$\rightarrow \frac{[\hat{H}_{-1}, \hat{H}_1]}{\Omega} \cong \sum_{ijk} \frac{t_{ij} t_{jk}}{4\Omega} \underbrace{(\mathbb{A}_0 \times \mathbb{A}_0^*)}_{\text{純虚数}} \cdot (\mathbb{R}_{ij} \times \mathbb{R}_{jk}) \underbrace{(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_k + \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_k)}_{\text{次近接ホッピング}} .$$

Haldane の Chern 絶縁体模型.



$C = \frac{\Lambda}{4\pi}$ での Hall 伝導度の量子化.

トポロジーとエッジ状態

$\hat{d}(k)$ がなめらかな関数であるかぎり $C = \frac{\Lambda}{4\pi}$ の値は不変.

→ ギャップが閉じて $d(\exists k) = 0$ になるとき

$\hat{d}$ が定義できなくなり C の値が変わる.

→ $C \neq 0$ の系と $C = 0$ の系 (or 真空) を接合すると

ギャップレスの状態が境界に (C 個) 現れる.

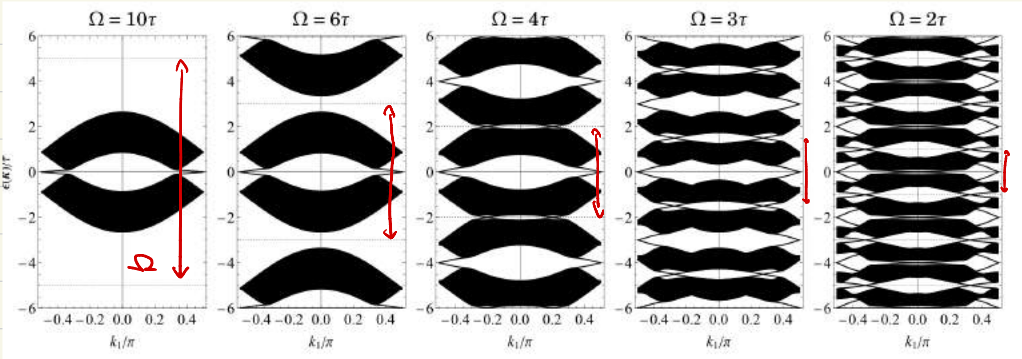
エッジがある系の Floquet 有効ハミルトニアンを

(数値的に) 計算して対角化すると,

ギャップレス状態が現れる.

◇ 異常 Floquet トポロジカル絶縁体
(& 平衡系には存在しない相).

グラフェン + 円偏光　　Ω を小さくしていくとどうなるか?



→ フォトン数の異なるバンド同士が準位反発する.
→ このときできるギャップもトポロジカルになっている.

(周期境界条件のもとで計算した Chern 数)
= ($\varepsilon = 0$ を通るエッジ状態数 ×向き) − ($\varepsilon = \frac{\Omega}{2}$ を通るエッジ状態数 ×向き).

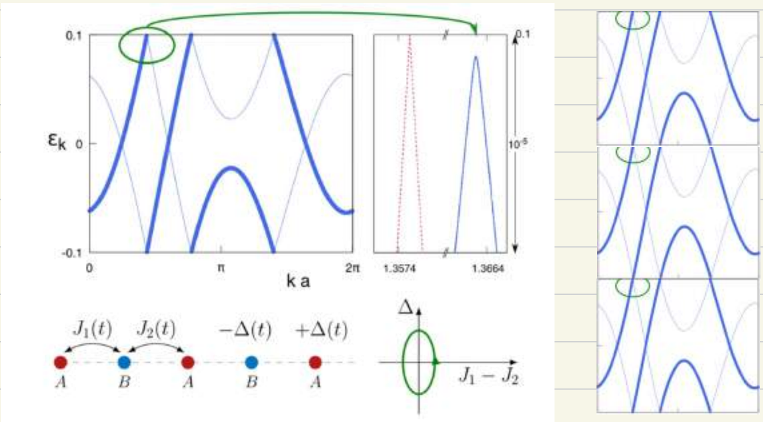
実際は独立なトポロジカル数.

後者は平衡系には絶対出てこない状態.

※ エッジ状態は出てくるが, それがどういう分布に従うかは非自明な問題.

その他の Floquet 系特有の相の例

Thouless pumping



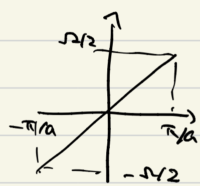
PRL 120, 106601 から借用

(1D) Rice-Mele model での Thouless pumping

$\Omega \neq 0$ での擬エネルギースペクトルは上図のように普通の意味での k に関する周期性を満たしていない. (於 断熱極限).

より簡潔には

$$\hat{U}(t_0+T, t_0) = e^{-ika} \text{ のとき } \hat{H}_{eff} = \frac{ka}{T} = \frac{ka}{2\pi}\Omega$$



などは平衡系では許されないが Floquet 系では実現可能

cf.) Nielsen-Ninomiya の定理

§4. 周期駆動系の統計力学

運動方程式 　　　　　　　　　　　平衡統計力学

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \longmapsto \rho_{cano} = e^{-\beta\hat{H}}/\mathrm{Tr}\,e^{-\beta\hat{H}}.$$

Floquet系の場合？

① $t=t_0+nT$ のみに着目すると、$\hat{H}=\hat{F}=iT^{-1}\ln\hat{U}(t_0+T,t_0)$ と等価.

→ $\rho = e^{-\beta\hat{F}}/\mathrm{Tr}\,e^{-\beta\hat{F}}$?

→ $\hat{F}$ は mod Ω でしか固有値が定まらず、矛盾?

② 内部エネルギー変化

$$\frac{d}{dt}\langle H(t)\rangle = \frac{d}{dt}\mathrm{Tr}[\rho(t)H(t)] = \mathrm{Tr}\left[-i\cancel{[H(t),\rho(t)]}H(t)\right] + \mathrm{Tr}\left[\rho(t)\frac{\partial H}{\partial t}\right]$$

$$= \left\langle\frac{\partial H}{\partial t}\right\rangle = \left\langle\frac{\partial H}{\partial A}\right\rangle\cdot\frac{\partial A}{\partial t} = \langle J\rangle\cdot E \sim \sigma E^2$$

電場をかけつづけると内部エネルギーは上昇しつづけるべき.

→ Floquet有効ハミルトニアンによる記述は間違い？

①について

時間発展ののちに平衡化が起こるには $\hat{H}$ に条件が必要.

(十分条件としては ETH を満たすこと等)

②について

多体系で Floquet 有効ハミルトニアンの固有状態を厳密に計算するとぐちゃぐちゃになっていて物理量の値は無限温度の値になっていて整合する.

ただし有効ハミルトニアンに特徴がないわけではなく、摂動展開したものとの差分は小さい(こともある)

→ 一般にはケースバイケースで分布を決める必要がある

(基本的には未解決問題)

4.1 対角アンサンブル

そもそも $i\partial_t|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle \rightarrow \rho = e^{-\beta\hat{H}}/\mathrm{Tr}\,e^{-\beta\hat{H}}$

は本当に成り立つのか？

cf) 金子 他「量子力学から熱力学の法則へ」

統計平均を考えたいので、$|\psi(t)\rangle$ の代わりに $\hat{\rho}(t)$ を考える。

$$\hat{\rho}(t) = \sum_\psi \underbrace{|\psi(t)\rangle}_{\hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle}\langle\psi(t)|\,C_\psi .$$ 混合状態

$\rightarrow$ Liouville eq. $i\partial_t\hat{\rho}(t) = [\hat{H}(t),\hat{\rho}(t)]$

形式解 $\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t,t_0)\hat{\rho}(t_0)\hat{U}(t,t_0)^\dagger$.

ハミルトニアンが時間非依存のとき、

$$\hat{U}(t,t_0) = \sum_\alpha |u_\alpha\rangle\langle u_\alpha|\,e^{-iE_\alpha(t-t_0)} .$$

$$\therefore\ \hat{\rho}(t) = \sum_{\alpha\beta}|u_\alpha\rangle\langle u_\beta|\,\underbrace{\langle u_\alpha|\hat{\rho}(t_0)|u_\beta\rangle}_{\rho_{\alpha\beta}}\,e^{-i(E_\alpha-E_\beta)(t-t_0)}$$

$$\mathrm{Tr}[\hat{O}\hat{\rho}(t)] = \sum_{\alpha\beta}\langle u_\beta|\hat{O}|u_\alpha\rangle\,\rho_{\alpha\beta}\,e^{-i(E_\alpha-E_\beta)(t-t_0)}$$

〜〜 の因子は、$\beta\neq\alpha$ のとき

- 長時間平均で 0 .
- 十分時間が経ってランダムになっていると思えば実質 0 .

なので

$$\hat{\rho}(t) \rightarrow \hat{\rho}_{\mathrm{diag}} = \sum_\alpha |u_\alpha\rangle\langle u_\alpha|\,\rho_{\alpha\alpha}$$

と置き換えて差し支えない。

※ 緩和時間はこの議論のみからは定まらない。

※ これが熱分布と一致するかどうかは また別の話

- 可積分 $\rightarrow$ △
- 非可積分で ETH $\rightarrow$ ○

周期駆動系の場合： $t = t_0 + nT$ に限れば
$\hat{H} \to \hat{F}$ と置き換えるだけで OK

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_0)\, \hat{\rho}(t_0)\, \hat{U}(t, t_0)^\dagger \quad \text{同じ}$$

$$\hat{U}(t, t_0) = \sum_\alpha |u_\alpha\rangle\langle u_\alpha|\, e^{-iE_\alpha (t - t_0)}$$

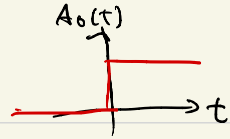
$$\hat{U}(t_0 + nT, t_0) = \sum_\alpha |v_\alpha(t_0)\rangle\langle v_\alpha(t_0)|\, e^{-i\varepsilon_\alpha nT}$$

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{\alpha\beta} |u_\alpha\rangle\langle u_\beta|\, \rho_{\alpha\beta}\, e^{-i(E_\alpha - E_\beta)(t - t_0)}$$

$$\hat{\rho}(t_0 + nT) = \sum_{\alpha\beta} |v_\alpha(t_0)\rangle\langle v_\beta(t_0)|\, \rho_{\alpha\beta}\, e^{-i(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) nT}$$

※ 一般の多体系では $|v_\alpha(t_0)\rangle$ も事実上ランダムベクトル.
対角アンサンブルへの緩和はむしろ遅くあってほしい.
途中で非自明な状態に長くトラップされる可能性？

→ (非自明な対角アンサンブルをつくるハミルトニアン)
+ (無限温度的なふるまいをもたらす小さな摂動) のような形に
なっていれば OK.



◇ 孤立系の一体問題

$\hat{H}(t)$ 及び $\hat{F}$ が一体問題で近似できる場合、

$t \le t_0$ では $\hat{H}_{eq}|\alpha\rangle = E_\alpha|\alpha\rangle$ で記述される一体問題の平衡。

$t = t_0$ で突然外場をオンにすると、分布は

$$\hat{U}(t,t_0)\Big(\underbrace{\sum_\beta f(E_\beta)|\beta\rangle\langle\beta|}_{f_{eq}}\Big)\hat{U}(t,t_0)^\dagger$$

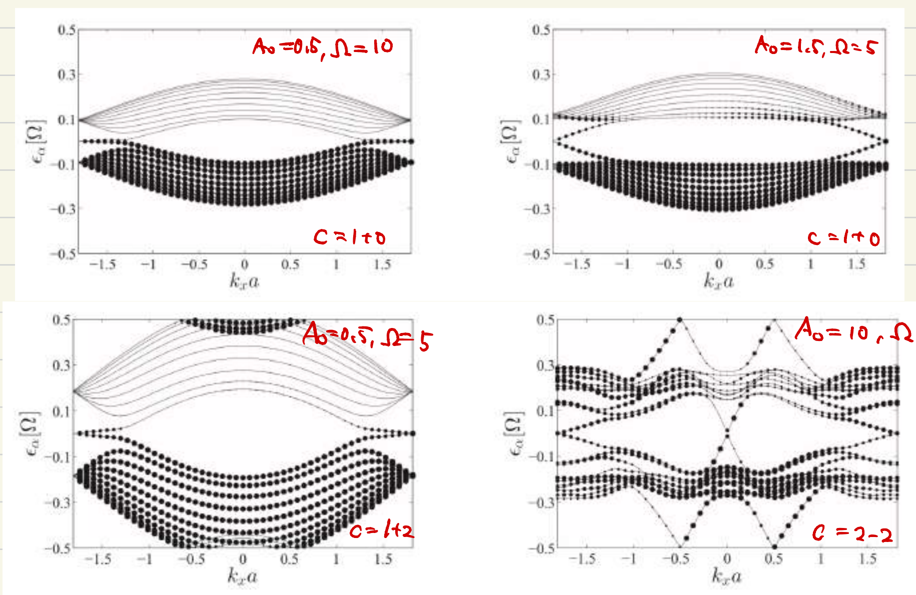
$$= \sum_{\alpha\beta\gamma} f(E_\beta)\langle\psi_\alpha(t_0)|\beta\rangle\langle\beta|\psi_\gamma(t_0)\rangle\ |\psi_\alpha(t)\rangle\langle\psi_\gamma(t)|$$

$$\xrightarrow{\text{対角アンサンブル}} \sum_{\alpha\beta} \underbrace{f(E_\beta)\,|\langle\beta|\psi_\alpha(t_0)\rangle|^2}_{f_\alpha}\ |\psi_\alpha(t)\rangle\langle\psi_\alpha(t)|.$$

$$f_\alpha = \sum_\beta f(E_\beta)\ |\langle\beta|\psi_\alpha(t_0)\rangle|^2 \qquad f_\alpha$$

$|\beta\rangle$ と $|\psi_\alpha(t_0)\rangle$ が近ければ f_α は $f(E_\beta)$ に近い。

グラフェン＋円偏光への応用



PRB, 93, 205437

より借用

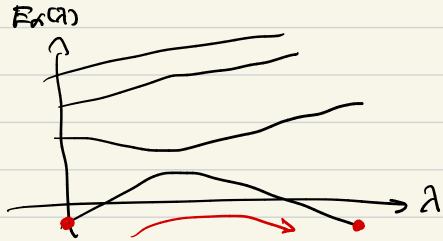
(外場振幅をゆっくり変化させた場合)

平衡系の断熱定理　パラメータ λ をゆっくり変化させる；

$\hat{H}(t) = \hat{H}_{eq}(\lambda(t))$　ときの時間依存 Schrödinger eq. の解

$\rightarrow \quad |\psi_\alpha(t)\rangle = |\alpha(\lambda(t))\rangle \, e^{-i\int_0^t E_\alpha(\lambda(t'))\,dt'}$

(Berry 位相は無視した)



基底状態 → 基底状態

Floquet 有効ハミルトニアンについても Hilbert 空間が有限なら同じことが成り立つ。

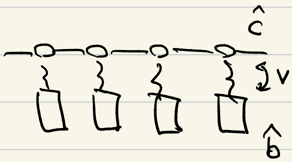
(次元が大きくなってくると小さな準位反発が無数に出現して破綻する)

「系のサイズを大きくする／エネルギーのカットオフを大きくするで新たに生じた状態のエネルギーが mod Ω で折り畳まれて「基底状態」と近いエネルギーを持つことがあるため。

◇ 開放系の一体問題

フェルミオンの粒子浴を取り付ける。 (グラフェンをsubstrateの上に置く)

$$\hat{H}_{tot} = \sum_{\alpha\beta} \langle\alpha|\hat{H}_{sys}(t)|\beta\rangle \hat{c}_\alpha^\dagger \hat{c}_\beta + \sum_{p\alpha}\left[V_p \hat{c}_\alpha^\dagger \hat{b}_{\alpha p} + h.c.\right] + \sum_{p\alpha} \omega_p \hat{b}_{\alpha p}^\dagger \hat{b}_{\alpha p}.$$



開放系の定式化 $\left\{ \begin{array}{ll} \text{量子マスター方程式} & \hat{\rho} \\ \text{NEGF法} & G^R, G^A, G^< \end{array} \right.$

今回は一体問題なのでごり押し。 $[\hat{c}_\alpha(t), \hat{H}_{tot}(t)]$

Heisenberg表示

$$\left\{ \begin{array}{l} i\partial_t \hat{c}_\alpha(t) = \langle\alpha|\hat{H}_{sys}(t)|\beta\rangle \hat{c}_\beta(t) + \sum_p V_p \hat{b}_{\alpha p}(t). \\ i\partial_t \hat{b}_{\alpha p}(t) = V_p^* \hat{c}_\alpha(t) + \omega_p \hat{b}_{\alpha p}(t) \end{array} \right.$$

$$i\partial_t \left(\hat{b}_{\alpha p}(t) e^{i\omega_p t}\right) = V_p^* \hat{c}_\alpha(t) e^{i\omega_p t}$$

$$\to \quad \hat{b}_{\alpha p}(t) = \hat{b}_{\alpha p}(t_0) e^{-i\omega_p(t-t_0)} - i V_p^* \int_{t_0}^{t} dt' \, \hat{c}_\alpha(t') e^{-i\omega_p(t-t')}$$

$$i\partial_t \hat{c}_\alpha(t) = \langle\alpha|\hat{H}_{sys}(t)|\beta\rangle \hat{c}_\beta(t) - i\sum_p |V_p|^2 \int_{t_0}^{t} dt' \, \hat{c}_\alpha(t') e^{-i\omega_p(t-t')} + \sum_p V_p \hat{b}_{\alpha p}(t_0) e^{-i\omega_p(t-t_0)}$$

ここで $\sum_p |V_p|^2 e^{-i\omega_p t} \simeq 2\Gamma\delta(t)$ であるとすると

(Markov 近似 : p の和 が ω_p 積分に置換できる)

$$i\partial_t \hat{c}_\alpha(t) = \langle\alpha|\hat{H}_{sys}(t)|\beta\rangle \hat{c}_\beta(t) - i\Gamma \hat{c}_\alpha(t)$$
$$+ \sum_p V_p \hat{b}_{\alpha p}(t_0) e^{-i\omega_p(t-t_0)}$$

(減衰 + 強制振動).

$|\psi_\alpha(t)\rangle = |u_\alpha(t)\rangle e^{-i\epsilon_\alpha t}$ が

$i\partial_t|\psi_\alpha(t)\rangle = \hat{H}_{sys}(t)|\psi_\alpha(t)\rangle$ をみたすとき,

$\hat{\psi}_\alpha(t) = \sum_\beta \langle\psi_\alpha(t)|\beta\rangle \hat{c}_\beta(t)$ を定義すると,

$$i\partial_t \hat{\psi}_\alpha(t) = \cancel{i\partial_t\langle\psi_\alpha(t)|\beta\rangle} \hat{c}_\beta(t)$$
$$+ \langle\psi_\alpha(t)|\beta\rangle \Big[\cancel{\langle\beta|\hat{H}_{sys}(t)|\gamma\rangle \hat{c}_\gamma(t)}$$
$$- i\Gamma \hat{c}_\beta(t)$$
$$+ \sum_p V_p \hat{b}_{\beta p}(t_0) e^{-i\omega_p(t-t_0)} \Big]$$

$$i\partial_t \hat{\psi}_\alpha(t) = -i\Gamma\hat{\psi}_\alpha(t) + \sum_{\beta p} \underbrace{\langle\psi_\alpha(t)|\beta\rangle}_{\langle u_{\alpha,m}| e^{i(\epsilon_\alpha + m\Omega)t}} V_p \hat{b}_{\beta p}(t_0) e^{-i\omega_p(t-t_0)}$$

$$\hat{\psi}_\alpha(t) \xrightarrow{t\to\infty} \sum_{\beta p m} \frac{V_p\langle u_{\alpha,m}|\beta\rangle}{\omega_p - \epsilon_\alpha - m\Omega + i\Gamma} \hat{b}_{\beta p}(t_0) e^{i\cdots}$$

$t = t_0$ での bath op. のみで $\hat{\psi}_\alpha(t)$ が書けている.

$\langle \hat{b}^\dagger_{\beta p}(t_0) \hat{b}_{\alpha q}(t_0)\rangle = f(\omega_p)\delta_{pq}\delta_{\alpha\beta}$ とすると

$$\overline{\langle\hat{\psi}^\dagger_\alpha(t)\hat{\psi}_\alpha(t)\rangle} = \sum_{pm} \frac{|V_p|^2 \langle u_{\alpha,m}|u_{\alpha,m}\rangle}{|\omega_p - \epsilon_\alpha - m\Omega + i\Gamma|^2} f(\omega_p)$$

← Lorenzian

$$\overset{\text{Markov}}{\simeq} \sum_m f(\epsilon_\alpha + m\Omega)\langle u_{\alpha,m}|u_{\alpha,m}\rangle$$

$$\overline{f_\alpha(t)} = \sum_m f(\epsilon_\alpha + m\Omega)\langle u_{\alpha,m}|u_{\alpha,m}\rangle$$

2日目のおさらい

Floquet トポロジカル絶縁体

円偏光照射によってグラフェンに
トポロジカルギャップが開く.
→ 高周波展開するとHaldane模型.

低周波では「平衡系にないトポロジカル相」
が現れる. ただし応答がどうなるかは?.

統計力学
孤立系の熱平衡化について.
- $\hat{\rho}$ が長時間ののちに(接定)エネルギーについて
対角なアンサンブルに帰着する.

→ 一体問題, クエンチの場合の分布公式.

$$f_\alpha = \sum_\beta f_{eq}(E_\beta)\, |\langle \beta | \psi_\alpha(t_0) \rangle|^2$$

開放系
一体問題の場合. Markov bath のもとでの
定常状態の分布公式.

$$f_\alpha = \sum_m f_{eq}(\epsilon_\alpha + m\Omega)\, |\langle u_{\alpha,m} | u_{\alpha,m} \rangle|^2$$

◇ 弧立系の多体問題

$$\hat{\rho}(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)}\,\hat{\rho}(t_0)\,e^{-i\hat{H}(t-t_0)}$$

$$\rightarrow \hat{\rho}_{diag} = \sum_\alpha |u_\alpha\rangle\langle u_\alpha|\,\rho_{\alpha\alpha}, \qquad \rho_{\alpha\alpha} = \langle u_\alpha|\hat{\rho}(t_0)|u_\alpha\rangle$$

一般には $e^{-\beta E_\alpha}/Z$ や

const. in $[E-\delta E, E+\delta E]$

ではない

固有状態熱化仮説 (ETH)

(局所的な)物理量 $\hat{O}$ の $|u_\alpha\rangle$ での期待値が熱平衡値に一致.

$$\langle u_\alpha|\hat{O}|u_\alpha\rangle = \langle \hat{O}\rangle_{th}$$

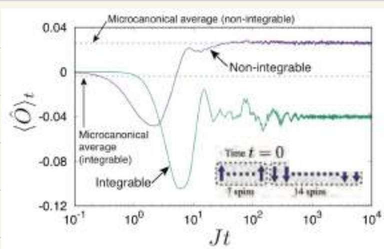
このとき, $\rho_{\alpha\alpha} \neq 0$ となる状態が $E_\alpha \in [E-\delta E, E+\delta E]$ であれば

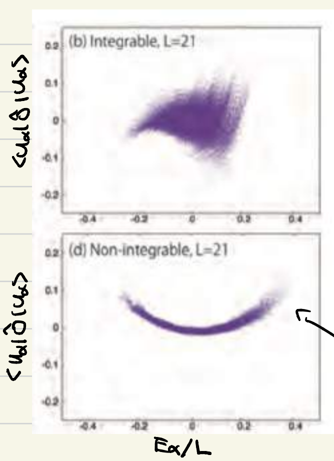
$$\mathrm{Tr}[\hat{O}\,\hat{\rho}_{diag}] = \sum_\alpha \langle u_\alpha|\hat{O}|u_\alpha\rangle\,\rho_{\alpha\alpha}$$

$$= \langle \hat{O}\rangle_{th} \sum_\alpha \rho_{\alpha\alpha} = \langle \hat{O}\rangle_{th}.$$

一般の非可積分系では成り立つと信じられている]

XXZ模型の数値計算





$L\to\infty$で一本の曲線に収束する(はず)

Floquet 系の場合：

$\hat{F} = i T^{-1} \ln \hat{U}(t_0+T, t_0)$ が ETH を満たせば熱平衡化する？

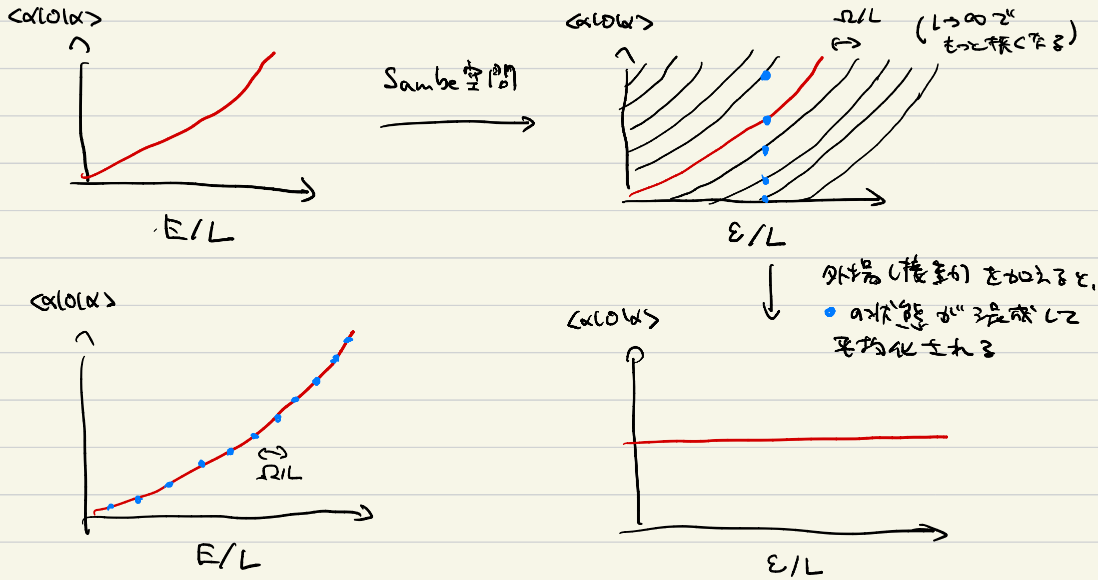
⇔ 熱力学的には無限温度状態になるべき？

Floquet ETH　　すべての Floquet 状態 $|\psi_\alpha(t)\rangle$ について、

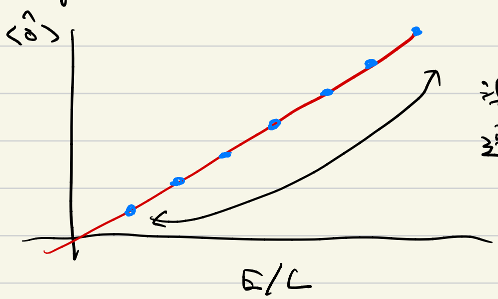
$$\langle \psi_\alpha(t)|\hat{O}|\psi_\alpha(t)\rangle = \langle \hat{O}\rangle_{T=\infty} .$$

一般の非可積分系で成立する（と信じられている）

（イメージ）



Floquet prethermalization



準位反発は非常に小さいはず。
遷移確率も同様に小さい。

→ 十分長い時間に渡って
無限温度状態の原因となる
混成を無視できることがある。

ex) $$\hat F = \hat F^{(\le N)}_{\text{high-frequency}} + \hat F_{\text{error}}$$

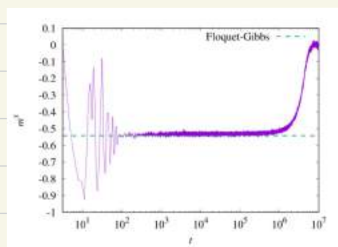
$$\hat F^{(\le N)}_{\text{high-frequency}} = \hat H_0 + \sum_{m\neq 0} \frac{[\hat H_{-m}, \hat H_m]}{2m\Omega} + \cdots \qquad \hat F_{\text{error}} = O\left(\frac{1}{\Omega^{N+1}}\right),$$

$\hat F_{\text{error}}$：無限温度化の要因

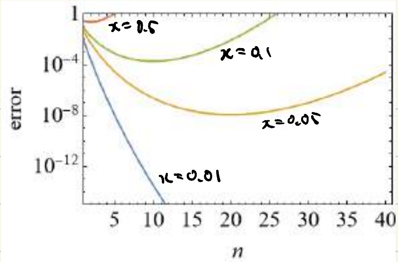
高周波展開は無限温度化を記述できないが、
(= 多体系で収束半径ゼロ)
漸近展開ではあるので、$\hat F$ のよい近似になることはある。

→ 格子模型での厳密な定理
(heatingの時間スケールは $e^{O(\Omega)}$)

- Kuwahara, Mori, Saito
- Mori, Kuwahara, Saito
- Abanin et al.



まず $\hat F^{(\le N)}$ の平衡状態への緩和 (prethermalization) が起こって、その後無限温度へ向かう。



漸近展開のおさらい

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \qquad (x \geq 0)$$

$$f(x) = \left[-\frac{e^{-t}}{1+xt}\right]_0^\infty + (-x)\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+xt)^2}\,dt$$

$$= 1 + (-x)\left[-\frac{e^{-t}}{(1+xt)^2}\right]_0^\infty + (-x)^2\, 2! \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+xt)^3}\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (-x)^n\, n! + (-x)^N N! \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+xt)^{N+1}}\,dt.$$

x固定, $N\to\infty$で発散. N固定, $x\to 0$で0. 絶対値1以下.

$x \lesssim \frac{1}{N}$では, $\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} (-x)^n n! \right| \leq x^N N! \leq N^{-N} N! \sim e^{-N}$.

発散的な展開でも, 展開パラメータのxが小さければ途中で打ち切った級数はよい近似になることがある.

Floquet-Magnus展開について, 一般項の公式

$$\hat{F}^{(n)} = \sum_\sigma \frac{(-1)^{n-\Theta_\sigma}\, \Theta_\sigma!\,(n-\Theta_\sigma)!}{i^n (n+1)^2\, n!\, T} \times \int_0^T dt_{n+1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \,[\hat{H}(t_{\sigma_{n+1}}), [\hat{H}(t_{\sigma_n}), \ldots [\hat{H}(t_{\sigma_2}), \hat{H}(t_{\sigma_1})]\ldots]]$$

$$\Theta_\sigma := \sum_{i=1}^{n} \theta(\sigma_{i+1} - \sigma_i)$$

を不等式評価すると

$\| \hat{F}^{(n)} \| \lesssim O\left(n! \left(\frac{1}{\Omega}\right)^n\right)$ で各項がバウンドできる.

$\rightarrow n_0 = O(\Omega)$ 次で打ち切ると errorが $e^{-O(\Omega)}$

(不等式評価の概略)

$\hat{H} = \sum$ exchange interaction など.

$\hat{\Pi}_n := [\hat{H}(t_n), \hat{\Pi}_{n-1}]$, $\hat{\Pi}_0 = \hat{H}(t_0)$ の $\|\cdot\|$ を評価すればよい.

※ $\hat{H}$ が k 体相互作用のとき, $\hat{\Pi}_n$ は高々 $(n+1)k$ 体相互作用.

$\sum^{(j)}$ でサイト j を囲う ◯ に制限した和を定義する.

$\hat{H}$ は $\sum^{(j)} \|\cdot\| \le g_0$ を満たすと仮定.

同様に $\hat{\Pi}_n$ は $\sum^{(j)} \|\cdot\| \le g_n$ としておく. このとき

$$\|\hat{\Pi}_n\| \le \sum_{j=1}^{N} \sum^{(j)} \|\cdot\| \le N g_n .$$

← どれくらい厳しくバウンドできるか？

$$\| [\hat{H}, \hat{\Pi}_{n-1}] \| \le \sum \sum \|\cdot\|$$

← 重なるものだけ和をとる

$$\le \sum \sum_{j \in} \sum^{(j)} \|\cdot\|$$

$\|[A, B]\| \le 2\|A\| \cdot \|B\|$

$$\le 2 \underbrace{\sum \|\cdot\|}_{N g_{n-1}} \underbrace{\sum_{j \in}}_{nk} \underbrace{\sum^{(j)} \|\cdot\|}_{g_0}$$

$$\therefore\ g_n = 2 g_{n-1} nk g_0 = \cdots = n! (2k g_0)^n g_0 .$$

$n!$ ↑ 発散の主因. nk 体相互作用に由来

$(2kg_0)^n$ ↖「高周波」のめやす.

$$\hat{F}^{(n)} = \sum_{\sigma} \frac{(-1)^{n-\theta_\sigma}\, \theta_\sigma!\,(n-\theta_\sigma)!}{i^n\,(n+1)^2\, n!\, T} \times \int_0^T dt_{n+1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \left[\hat{H}(t_{\sigma_{n+1}}), \left[\hat{H}(t_{\sigma_n}), \cdots \left[\hat{H}(t_{\sigma_2}), \hat{H}(t_{\sigma_1})\right]\cdots\right]\right]$$

$$\|\hat{F}^{(n)}\| \le \underbrace{\sum_{\sigma}}_{(n+1)!} \underbrace{\frac{\theta_\sigma!\,(n-\theta_\sigma)!}{(n+1)^2\, n!\, T}}_{\text{1以下}} \times \underbrace{\int_0^T dt_{n+1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1}_{\frac{T^{n+1}}{(n+1)!}} \underbrace{n!\,(2kg_0)^n g_0}_{\text{前ページ}}$$

$$\le \frac{1}{(n+1)^2}\, n! \left(\frac{4\pi k g_0}{\Omega}\right)^n g_0 .$$

項の比

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^2}\, n! \left(\frac{4\pi k g_0}{\Omega}\right)^n g_0}{\frac{1}{n^2}\,(n-1)! \left(\frac{4\pi k g_0}{\Omega}\right)^{n-1} g_0} = \frac{1}{(1+1/n)^2}\, n\, \frac{4\pi k g_0}{\Omega} .$$

$n_0 \simeq \dfrac{\Omega}{4\pi k g_0}$ で打ち切れば正確な近似になる.

§ 5 Floquet Engineering II

Hubbard 模型

$$\hat{H}(t) = \sum_{ij\sigma} t_{ij} e^{-iA(t)\cdot(R_i - R_j)} \hat{c}^\dagger_{i\sigma} \hat{c}_{j\sigma} + U \sum_i \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i\downarrow}.$$

まずは U が比較的小さいケースから見ていく.

◇ 動的局在現象

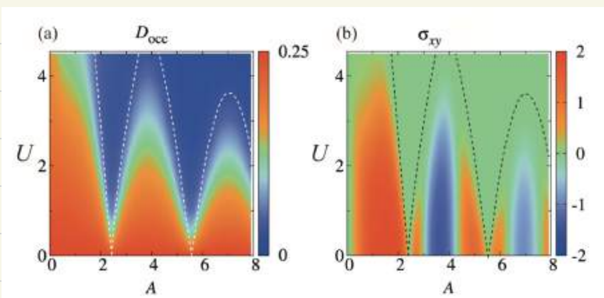
高周波展開の 0次 : $\hat{H}_{\mathrm{eff}} = J_0(A_0)\,\hat{T} + \hat{V}$

→ 実効的に U が大きい領域にシフトする

(光誘起 Mott 転移が起こせる)

ハニカム ハバード + 円偏光, 開放系

Floquet-DMFTによる計算



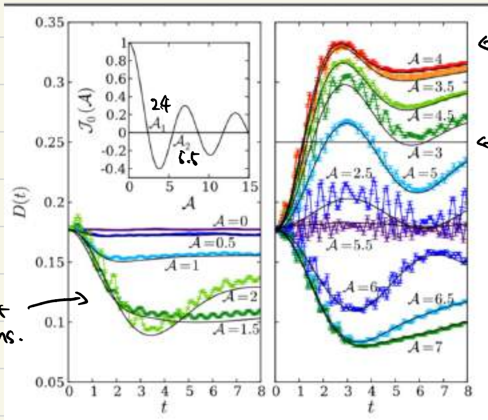
PRB 93, 144307 (2016)

◇ 動的バンド反転

さらに A_0 を強くして $J_0(A_0)<0$ になると何が起こるか?

非平衡DMFTによる時間発展　(孤立系)

$\Omega=2\pi$, $U=1$.



Mott Ins.

← D>0.25となっており、相互作用が引力的?

← D=0.25 (自由電子の値)

PRL 106, 236401 (2011)

ホッピングの符号を反転させたのに、
Uの符号が反転したかのように見える.

ミクロカノニカル分布は $\hat{H}_{eff}$ と $-\hat{H}_{eff}$ で同じ状態を与える.
(ただし温度の符号は反転させる必要がある) $e^{-\beta \hat{H}_{eff}} = e^{\beta(-\hat{H}_{eff})}$

Uがあまり大きくなく、運動エネルギーが支配的なとき、
$J_0(A_0)$ の符号を(突然)反転させると高エネルギー状態が
優先的に占有された状態 (負温度) になる.

熱浴への散逸が無ければ実効的に引力系
(超伝導転移が期待される)

◇ 有効スピン間相互作用.

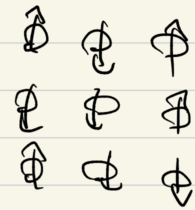
今度は U が大きい極限を考える.

atomic limit $\hat{H}_{at} = U \sum_i \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i\downarrow}$.

固有値は dU, $d \in \mathbb{N}$ は二重占有されているサイトの数.

マクロに縮退している

(サイト数L, 電子数L なら $E=0$ の状態は 2^L 個).



ホッピングを加えると縮退が解ける.

このとき $\hat{H}_{spin} \simeq \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{4|t_{ij}|^2}{U} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$.

ハイゼンベルグハミルトニアンの導出は高周波展開とほぼ同様にできる.

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & T_{01} & & & \\ T_{10} & U & T_{12} & & 0 \\ & T_{21} & 2U & T_{23} & \\ 0 & & T_{32} & 3U & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

※ブロックのサイズは
ブロックごとに異なる.

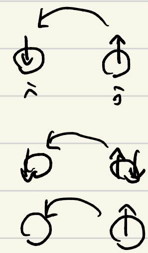
$$e^{i\hat{A}} \hat{H} e^{-i\hat{A}} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{spin} & & 0 & \\ & \hat{H}_{t\text{-}J,1} & & \\ 0 & & \hat{H}_{t\text{-}J,2} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

レーザー光があるときも、Sambe空間でのブロック対角化で
(time-periodicな) スピンハミルトニアンが導ける。

$$\hat{H}(t) = \hat{T}(t) + U\hat{D}$$ と書く。

$$\hat{T}(t) = \hat{T}_{+1}(t) + \hat{T}_{0}(t) + \hat{T}_{-1}(t),$$

$$\begin{cases} \hat{T}_{+1} = \sum_{ij\sigma} t_{ij}\, \hat{n}_{i\bar{\sigma}}\, \hat{c}^{\dagger}_{i\sigma}\, \hat{c}_{j\sigma}\,(1-n_{j\bar{\sigma}}) \\ \quad\;\; = \hat{T}_{-1}(t)^{\dagger} \\ \hat{T}_{0} = \sum_{ij\sigma} t_{ij}\big[\hat{n}_{i\bar{\sigma}}\, c^{\dagger}_{i\sigma}\, c_{j\sigma}\, \hat{n}_{j\bar{\sigma}} \\ \qquad\quad + (1-\hat{n}_{i\bar{\sigma}})\, \hat{c}^{\dagger}_{i\sigma}\, \hat{c}_{j\sigma}\,(1-\hat{n}_{j\bar{\sigma}})\big] \end{cases}$$



$$\rightarrow \quad [\hat{D}, \hat{T}_{+d}(t)] = d\,\hat{T}_{+d}(t).$$

さらに $\hat{T}_{+d}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{T}_{d,m}\, e^{-im\Omega t}$ とする。

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eff} &= e^{i\hat{\Lambda}(t)}(\hat{H}(t) - i\partial_t)\, e^{-i\hat{\Lambda}(t)} \\ &= U\hat{D} \\ &\quad + \hat{T}(t) + [i\hat{\Lambda}^{(1)}, U\hat{D} - i\partial_t] \\ &\quad + [i\hat{\Lambda}^{(1)}, \hat{T}(t)] + \frac{1}{2}[i\hat{\Lambda}^{(1)}, [i\hat{\Lambda}^{(1)}, U\hat{D} - i\partial_t]] \\ &\quad + \cdots \end{aligned}$$

ここでは operatorとみなす (Sambe空間では $\hat{m}\Omega$)

$$\hat{T}(t) + \left[i\hat{\Lambda}^{(1)},\ U\hat{D} - i\partial_t \right]$$

$$0 = \hat{T}_{d,m}\, e^{-im\Omega t} + \left[i\hat{\Lambda}^{(1)}_{d,m}\, e^{-im\Omega t},\ U\hat{D} - i\partial_t \right]$$

$$= \left(\hat{T}_{d,m} - (dU - m\Omega)\, i\hat{\Lambda}^{(1)}_{d,m} \right) e^{-im\Omega t}.$$

(但し $d=m=0$ は除く).

$$\rightarrow \hat{H}^{(1)}_{\mathrm{eff}} = \hat{T}_{0,0}.$$

又, $i\hat{\Lambda}_{0,0} = 0$ としておく.

$$\left[i\hat{\Lambda}^{(1)}, \hat{T}(t) \right] + \frac{1}{2}\left[i\hat{\Lambda}^{(1)}, \left[i\hat{\Lambda}^{(1)}, U\hat{D} - i\partial_t \right] \right]$$

$$= \left[i\hat{\Lambda}^{(1)}, \hat{T}(t) \right] + \frac{1}{2}\left[i\hat{\Lambda}^{(1)}, \hat{T}_{0,0} - \hat{T}(t) \right]$$

特に $U\hat{D}$, $-i\partial_t$ と可換な項は

$$\hat{H}^{(2)}_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{2}\sum_{d,m} \left[i\hat{\Lambda}^{(1)}_{d,m}\ \hat{T}_{-d,-m} \right]$$

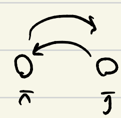
$$= \frac{1}{2}\sum_{d,m} \frac{\left[\hat{T}_{d,m}, \hat{T}_{-d,-m} \right]}{dU - m\Omega}.$$

特に $\langle \hat{D} \rangle = 0$ のセクター ($\hat{H}_{\mathrm{spin}}$) では

$\hat{n}_{i\sigma}$ などは取り外せる

$$\hat{H}^{(2)}_{\mathrm{spin}} = -\sum_m \frac{\hat{T}_{-1,-m}\hat{T}_{+1,+m}}{U - m\Omega}.$$

$$= -\sum_m \frac{\sum_{ij\sigma} t^{(-m)}_{ij}\, \hat{c}^{+}_{i\sigma}\hat{c}_{j\sigma} \sum_{\sigma'} t^{(m)}_{ji}\, \hat{c}^{+}_{j\sigma'}\hat{c}_{i\sigma'}}{U - m\Omega}$$



$$= -\sum_m \sum_{ij} \frac{|t_{ij} J_m(A_{ij})|^2}{U - m\Omega} \sum_{\sigma\sigma'} \hat{c}^{+}_{i\sigma}\hat{c}_{i\sigma'} \left(\delta_{\sigma\sigma'} - \hat{c}^{+}_{j\sigma'}\hat{c}_{j\sigma} \right)$$

half-filledのときの関係式

$\hat{c}^{\dagger}_{i\sigma}\hat{c}_{i\sigma'} = \frac{1}{2}\delta_{\sigma\sigma'} + \sigma_{\sigma\sigma'}\cdot S_i$ を使うと、

$$\hat{H}^{(2)}_{spin} = \sum_m \sum_{ij} \frac{4|t_{ij} J_m(A_{ij})|^2}{U - m\Omega}\left(-\frac{1}{4} + \hat{S}_i\cdot\hat{S}_j\right)$$

ハイゼンベルグ相互作用が、

$$J = \frac{4t^2}{U} \longrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{4t^2 J_m^2(A_0)}{U - m\Omega}$$ に変化。

電場で磁性がコントロールできる。

$U - m\Omega < 0$ の項が大きくなるところでは

J は強磁性的になる。

(但し孤立系・ウェンチでは負温度になって

強磁性転移は起きない)

- 円偏光の場合どうなるか?

(展係で) ホッピングが複素のとき、

$$\hat{H}^{(3)}_{spin} \propto \sum_{ijk} \mathrm{Im}\left(\frac{t_{ij}t_{jk}t_{ki}}{U^2}\right)(S_i \times S_j)\cdot S_k$$

スカラーカイラリティ項。

円偏光・実ホッピングの場合、

4次摂動で現れる (オーダーには $\frac{t^2\frac{At^2}{\Omega}}{U^2}$ から出る)

$\longrightarrow$ カイラルスピン液体?

◇ η ペアリング超伝導

引力 Hubbard 模型

$$\hat{H} = \sum_{ij} t_{ij} \hat{c}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{j\sigma} - \mu \sum_{i} \hat{n}_{i} - U \sum_{i} n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} .$$

弱結合：BCS 状態．　強結合：分子 BEC

クロスオーバー

断熱変換

bipartite 格子で $\hat{c}_{i\uparrow} \to \hat{c}_{i\uparrow}^{\dagger} (-1)^{i}$ なるマッピングを行う．

$$(-1)^{i} = \begin{cases} 1 & (A \text{ sites}) \\ -1 & (B \text{ sites}) \end{cases}$$

AB間のみをつなぐ

$$\begin{aligned} \hat{H} \to & \sum_{ij} t_{ij} \left(- \hat{c}_{i\uparrow} \hat{c}_{j\uparrow}^{\dagger} + \hat{c}_{i\downarrow}^{\dagger} \hat{c}_{j\downarrow} \right) \\ & - \mu \sum_{i} (1 - \hat{n}_{i\uparrow} + \hat{n}_{i\downarrow}) \\ & - U \sum_{i} (1 - \hat{n}_{i\uparrow}) \hat{n}_{i\downarrow} . \\ = & \sum_{ij\sigma} t_{ij} \hat{c}_{i\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{j\sigma} \qquad (t_{ij} = t_{ji}) \\ & + U \sum_{i} \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i\downarrow} \\ & + \left(\mu + \frac{U}{2}\right) \sum_{i} (\hat{n}_{i\uparrow} - \hat{n}_{i\downarrow}) - \frac{U}{2} \sum_{i} \hat{n}_{i} - \mu L \end{aligned}$$

引力 ⟷ 斥力 (＋磁場)．

ハーフフィリングで消える．

$$S_i^z = \frac{1}{2} (\hat{n}_{i\uparrow} - \hat{n}_{i\downarrow}) \longrightarrow \eta_i^z = \frac{1}{2} (1 - \hat{n}_{i}) .$$ 密度

$$S_i^x + i S_i^y = \hat{c}_{i\uparrow}^{\dagger} \hat{c}_{i\downarrow} \longrightarrow \eta_i^x + i \eta_i^y = \hat{c}_{i\uparrow} \hat{c}_{i\downarrow} (-1)^{i}$$ 超伝導

外場があるとき?

$$\sum_{ij} t_{ij}\, e^{-iA(t)(R_i-R_j)}\, \hat{c}^\dagger_{i\uparrow}\hat{c}_{j\uparrow}$$

$$\longrightarrow \sum_{ij} t_{ij}\, e^{-iA(t)(R_i-R_j)}\, \hat{c}^\dagger_{j\uparrow}\hat{c}_{i\uparrow}.$$

$$= \sum_{ij} t_{ij}\, e^{+iA(t)(R_i-R_j)}\, \hat{c}^\dagger_{i\uparrow}\hat{c}_{j\uparrow}.$$

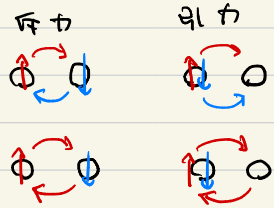
つまり $e^{-iA(t)\cdot(R_i-R_j)} \longrightarrow e^{i\sigma A(t)\cdot(R_i-R_j)}$

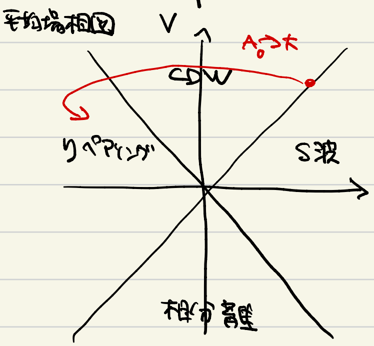
電場 $\longrightarrow$ スピン軌道相互作用

引力と斥力の等価性が破れる!

$$\hat{H}_{eff} = \sum_{\langle ij\rangle}\left[J_{eff}\left(\eta_i^x\eta_i^x + \eta_i^y\eta_i^y\right) + V_{eff}\,\eta_i^z\eta_i^z\right].$$

$$\begin{cases} J_{eff} = \sum_m (-1)^m \dfrac{4t^2 J_m(A_0)^2}{|U|-m\Omega}, \\ V_{eff} = \sum_m \dfrac{4t^2 J_m(A_0)^2}{|U|-m\Omega}. \end{cases}$$





リペアリング相:
重心運動量 $Q=(\pi/a, \pi/a, \pi/a)$ への凝縮.
ハバード模型の厳密固有状態として知られる.
S波の解は自由エネルギーの極大.

CDW相:
超伝導の解は自由エネルギーの鞍点,
→ 無限小の摂動で崩壊する.

S波 → CDW → リペアリング と A_0 を変えていくと
孤立系でも S波からリペアリングへのスイッチができる.

◇ Floquet トポロジカル超伝導

グラフェン + 円偏光 ⟶ トポロジカル絶縁体
(high-T_c) 超伝導体 + 円偏光 ⟶ トポロジカル超伝導 ?

超伝導体の記述: Bogoliubov-de Gennes 形式

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{H}_{BdG} = \begin{pmatrix} \hat{c}_{k\uparrow} \\ \hat{c}^{+}_{-k\downarrow} \end{pmatrix}^{+} \begin{pmatrix} E_k & \Delta_k \\ \Delta_k^{*} & -E_{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_{k\uparrow} \\ \hat{c}^{+}_{-k\downarrow} \end{pmatrix}, \\ \Delta_k = \sum_p V_{k,p} \langle \hat{c}_{-p\downarrow} \hat{c}_{p\uparrow} \rangle , \end{array}\right.$$

この有効一体問題のトポロジーを考える。

外場とのカップリング

$$\rightarrow \quad \hat{H}_{BdG}(t) = \begin{pmatrix} \hat{c}_{k\uparrow} \\ \hat{c}^{+}_{-k\downarrow} \end{pmatrix}^{+} \begin{pmatrix} E_{k+A(t)} & \Delta_k \\ \Delta_k^{*} & E_{-k+A(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_{k\uparrow} \\ \hat{c}^{+}_{-k\downarrow} \end{pmatrix}$$

電磁場はギャップ関数 Δ_k とは結合しない。
→ H_{BdG} の commutator からは対角項の modulation しか得られない。（※それでもOKなケースもある）

一方、有効相互作用 V_k は
よく現象論的な関数として導入されるが
ミクロには多体効果から生まれる。
V_k が外場によって変調されてもよい。

強結合の Hubbard 模型

$$\rightarrow \hat{H}_{t\text{-}J} = \hat{T}_0 + J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{S}_i \cdot \hat{S}_j .$$

ギャップ方程式を Gutzwiller 平均場近似のもと立てると

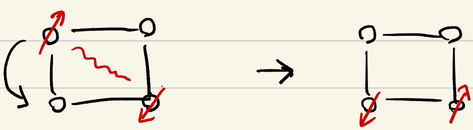
$$\Delta_k = \underbrace{-\frac{3J}{2} \sum_p (\cos k_x - \cos k_y)(\cos P_x - \cos P_y)}_{V_{k,p}} \langle \hat{C}_{-p\downarrow} \hat{C}_{p\uparrow} \rangle$$

$d_{x^2-y^2}$ 波を安定にする相互作用.

円偏光があるとスカラーカイラリティ項

$J_\chi (S_i \times S_j) \cdot S_k$ が誘起される.

また他にも 3サイト項と呼ばれる 2次摂動項が複素になる. (周りのサイトと相互作用しながらホッピングする項)



これらの寄与による $V_{k,p}$ の変調

γ: 3サイト項の強さ

δ: ドープ量

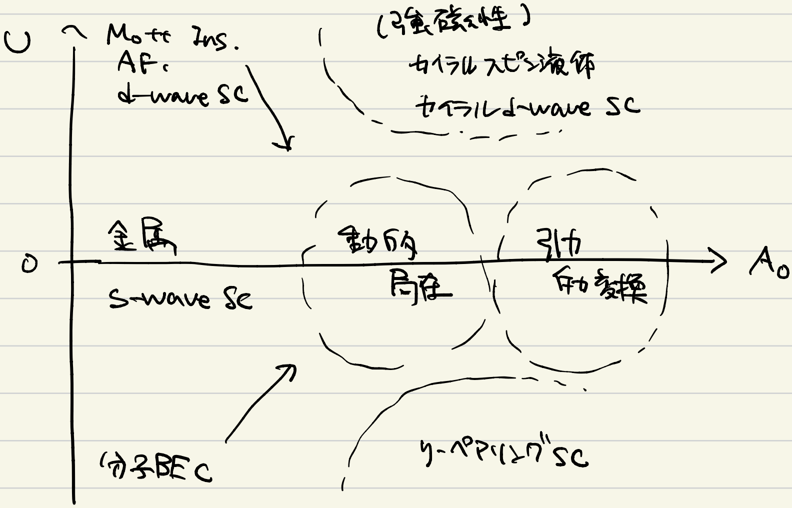
χ: ホッピングの期待値

$$\rightarrow \delta V_{k,p} \simeq -12i (2\delta\gamma + J_\chi \chi) \times \sin k_x \sin k_y (\cos P_x - \cos P_y)$$

$d_{x^2-y^2}$ 波があると, $i\,d_{xy}$ 波を誘起する相互作用.

$d_{x^2-y^2} + i\,d_{xy}$ 型のカイラル超伝導

まとめ



U
Mott Ins.
AF.
d-wave SC
(強磁性)
カイラルスピン液体
カイラルd-wave SC
0
金属
s-wave SC
動的
局在
引力
動的変換
A_0
(分)子BEC
リーペアリングSC